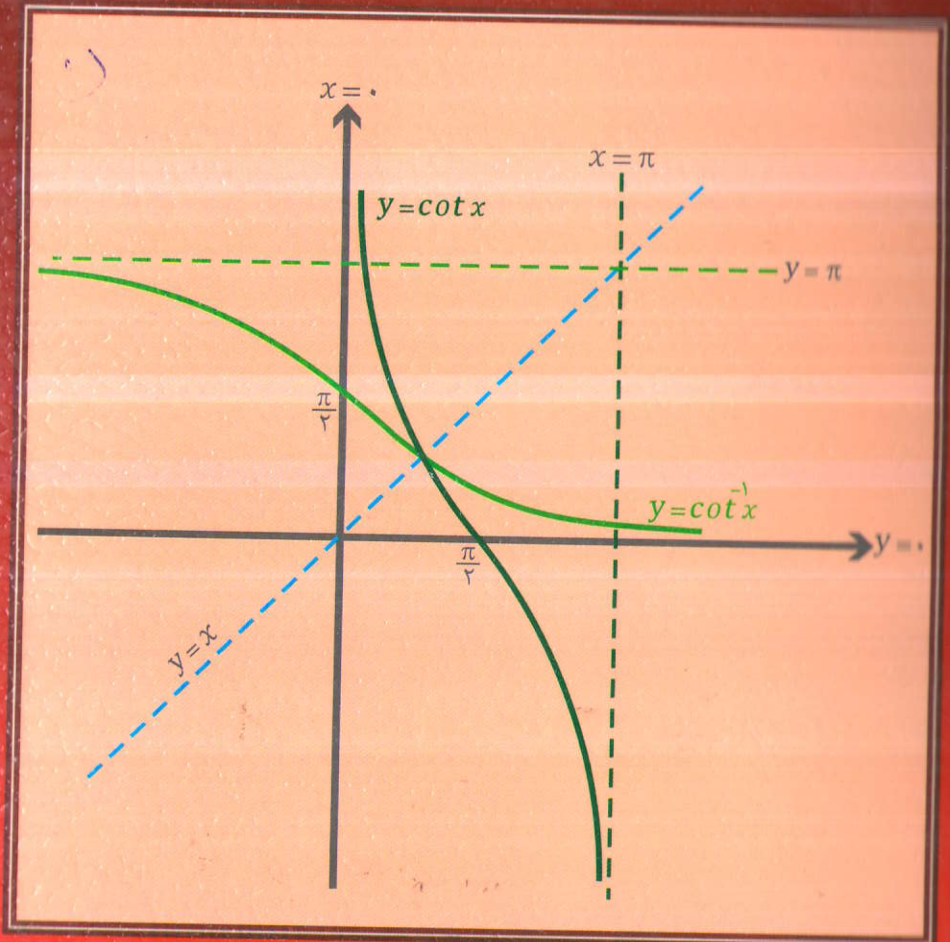
ویرایش چهارم
همراه با پاسخ کوتاه تمرین‌ها

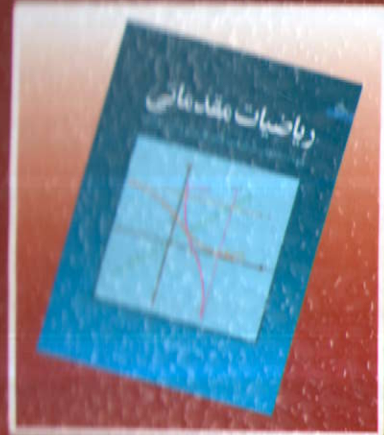
ریاضیات عمومی یک

ویژه دانشجویان مراکز فنی، علمی کاربردی و آزاد اسلامی



محمدعلی کرایه‌چیان

ریاضیات عمومی یک
محمدعلی کرایه‌چیان



مؤلف:

محمدعلی کرایه‌چیان

دانشکده فنی شهید محمد منتظری مشهد

۰۹۱۵ ۶۸۰ ۶۱۰۰

www.kerachy.com

kerachy4@yahoo.com   *kerachy@gmail.com*

ناشر:

نشر تمرین

۰۹۱۵ ۳۱۱ ۸۹۸۳

Hejazi.tamrin@yahoo.com

نوبت چاپ: سی و دوم (چاپ سوم ناشر)

سال چاپ: شهریور ۱۳۹۴

شمارگان و قطع: ۶۰۰۰ نسخه، وزیری

امور فنی و چاپ: مؤسسه چاپ و انتشارات آستان قدس رضوی

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۷۶۹۵-۶۴-۰

قیمت: ۱۷۰۰۰ تومان

مراکز پخش:

مشهد: جهاد دانشگاهی ۳۰ ۴۲۲ ۳۸۸-۰۵۱

کتاب رئوف ۴۶ ۵۸ ۰ ۳۸۴-۰۵۱ ، ۰۹۱۵ ۵۰۹ ۵۶۸۳

تهران: کتابیران ۱۵-۱۰ ۶۶۵ ۶۶۵-۰۲۱

دانشیران ۷۶ ۱۶۶ ۶۶۴-۰۲۱

نوپردازان ۷۳ ۱۱۱ ۶۶۴-۰۲۱

نشر تمرین

فهرست

در دوره‌های **کاردانی** و **کارشناسی** دانشگاه‌ها و مراکز آموزش عالی کشور برای رشته‌های مختلف، درسی با عنوان‌های **ریاضیات عمومی**، **ریاضیات عمومی یک** یا **ریاضیات پایه** ارائه می‌گردد و حدود هشتاد درصد سرفصل این دروس مشترک می‌باشد ولی با توجه به نیاز رشته‌های مختلف، مطالب هر فصل را باید عمیق‌تر یا سطحی‌تر مورد بررسی قرارداد.

بهتر آن است که برای هر رشته، کتاب خاصی تدوین شود ولی این کار با توجه به تعداد زیاد رشته‌ها، بسیار دشوار و پرهزینه می‌باشد. با این شرایط، مؤلف سعی کرده کتابی تدوین کند که قابل استفاده دانشجویان **بسیاری از رشته‌ها** باشد.

در مورد این کتاب نکات زیر شایان توجه است:

۱- استادان محترم متناسب با سرفصل هر رشته می‌توانند بخش‌ها، مثال‌ها و تمرین‌هایی از کتاب را برای آموزش برگزینند و دانشجویان عزیز باید توجه داشته باشند، مطالب و تمرین‌هایی مربوط به درس آنها می‌باشد که، توسط استاد مربوط تدریس و تعیین می‌شود.

۲- با توجه به اینکه درک عمیق مطالب ریاضی و تسلط بر آن، با حل مسئله و تمرین زیاد امکان‌پذیر می‌باشد، برای هر بخش تمرین‌های فراوانی انتخاب شده است، اما باید دانست، امکان طرح و حل همه آنها در کلاس وجود ندارد.

۳- تمرین‌ها بگونه‌ای چیده شده که بسیاری از شماره‌های فرد و زوج متوالی راه حل یکسانی دارند. در این نوع تمرین‌ها، برای صرفه جویی در زمان و ایجاد فرصتی مناسب برای تمرین و تکرار بیشتر توسط دانشجو، می‌توان فقط شماره‌های زوج (یا فرد) را در کلاس حل و دسته دیگر را به دانشجو واگذار کرد.

۴- در تنظیم تمرین‌ها سعی شده هماهنگی فراوانی بین مطالب متن و تمرین‌ها وجود داشته باشد، به عبارت دیگر مشابه اکثر تمرین‌ها در قالب مثال در متن حل شده است، ضمن اینکه دانشجویان عزیز برای بررسی درستی جواب خود و یافتن آرامش، می‌توانند به قسمت **«پاسخ کوتاه تمرین‌ها»** در پایان کتاب، مراجعه کنند.

۵- فصل تابع دارای اهمیت بسیار زیادی می‌باشد، زیرا در خیلی از مباحث کتاب باید به مطالب آن رجوع کرد؛ ضمن اینکه در بعضی از رشته‌ها، بحث تابع به طور کامل و یا قسمتی از آن جزء سرفصل ریاضیات عمومی می‌باشد، لذا فصل تابع **کتاب ریاضیات مقدماتی**، در این کتاب نیز تکرار شده است.

۶- فصل هفتم یعنی اعداد مختلط جزء سر فصل بعضی از رشته‌ها مانند رشته برق می‌باشد. می‌توان به علت نیاز دانشجویان این رشته به آشنایی زودتر با این اعداد، این فصل را بدون اشاره به بحث سری‌ها، در اوایل ترم تدریس کرد.

۷- در سر فصل تعداد اندکی از رشته‌ها، فصل سری و دنباله و فصل ماتریس‌ها نیز وجود دارد، به خاطر جلوگیری از افزایش حجم کتاب، این دو فصل را در **کتاب ریاضیات عمومی دو** آورده‌ایم.

لازم به توضیح است که همزمان با چاپ هفتم، ویرایش دوم کتاب نیز انجام شد. استقبال استادان و دانشجویان سراسر کشور از این اثر، دریافت پیشنهادات و نکات ارزنده همکاران و یکسان سازی مطالب این کتاب با ویرایش‌های جدید کتاب‌های ریاضیات مقدماتی و ریاضیات عمومی دو، مؤلف را بر آن داشت که با بازنگری مجدد در متن و تمرین‌ها، در چاپ یازدهم ویرایش سوم و در چاپ بیست‌وسوم ویرایش چهارم کتاب را ارائه کند.

در مجموع، هدف نویسنده این بوده که درسنامه‌ای مناسب برای ریاضیات عمومی ارائه کند. قضاوت و داوری در این مورد، به عهده همکاران بزرگواری می‌باشد که آن را با دقت مورد مطالعه و بررسی قرار داده و با انتقادات و دیدگاه‌های اصلاحی خود، اینجانب و سایر مؤلفان کتب درسی را در بهبود آموزش ریاضیات یاری خواهند داد.

در پایان، خداوند بزرگ را به خاطر توفیق تألیف این اثر شاکرم؛ هم‌چنین لازم می‌دانم از استادان محترم گروه ریاضی دانشکده فنی شهید محمد منتظری مشهد که مشوق اینجانب در تألیف این کتاب بوده و جمعی از آنان در مطالعه و اصلاح فصل‌های مختلف یاری‌ام نموده‌اند، سپاسگزاری کنم.

همراهی و همکاری همسر بزرگوار و فرزندان عزیزم، که با ایجاد محیطی گرم و سرشار از محبت، شرایط مناسبی برای تألیف این اثر فراهم نمودند قابل تقدیر است.

هم چنین از آقای جواد صابری‌فر برای ترسیم شکل‌های کتاب، آقای دکتر سید جواد رسولی مدیر مسئول و خانم فرخنده فاضل بخششی مدیر اجرایی انتشارات آهنگ قلم به خاطر تلاش برای چاپ مطلوب این اثر صمیمانه تشکر می‌کنم.

محمدعلی کرایه‌چیان

تابستان ۱۳۹۱

فصل یکم

تابع

۱-۱ رابطه و تابع

تعریف ۱: هرگاه بین دو شئ a و b ترتیب در نظر بگیریم، آن را **زوج مرتب** نامیده و با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم. a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می‌نامند.

تعریف ۲: حاصل ضرب دو مجموعه A و B را با نماد $A\times B$ نمایش داده و به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{ و } b\in B\}$$

تعریف ۳: هر زیر مجموعه $A\times B$ مانند R را یک **رابطه** از مجموعه A به مجموعه B می‌نامند $(R\subset A\times B)$.

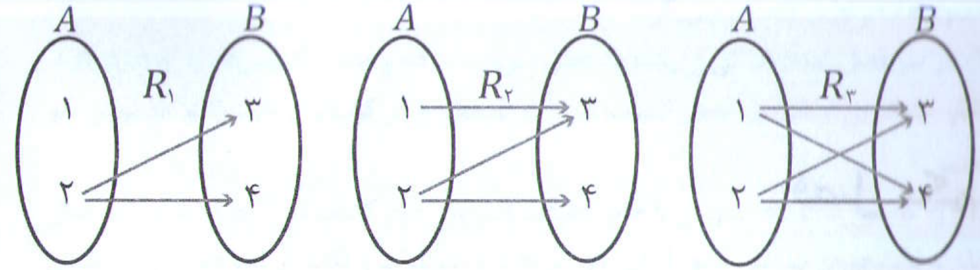
مثال ۱: هرگاه $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۳,۴\}$ باشد، مجموعه‌های زیر، رابطه‌هایی از A به B می‌باشند.

$$R_۱=\{(۲,۳)\,،\,(۲,۴)\}$$

$$R_۲=\{(۱,۳)\,،\,(۲,۳)\,،\,(۲,۴)\}$$

$$R_۳=A\times B=\{(۱,۳)\,،\,(۱,۴)\,،\,(۲,۳)\,،\,(۲,۴)\}$$

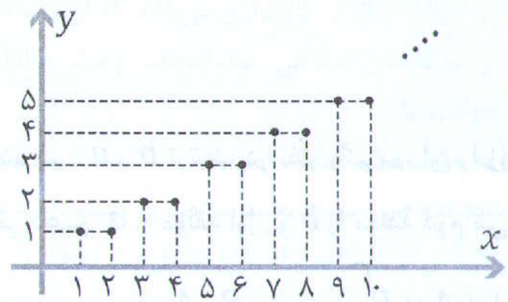
نمودار پیکانی: نمودار پیکانی رابطه‌های مثال قبل به صورت زیر می‌باشد.



مثال ۲: هرگاه $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد، مجموعه زیر یک رابطه از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ می‌باشد.

$$R = \{(۱,۱) ، (۲,۱) ، (۳,۲) ، (۴,۲) ، (۵,۳) ، (۶,۳) ، \dots\}$$

نمودار دکارتی: نمودار دکارتی مثال قبل به صورت زیر می‌باشد.



تعریف ۴: هر رابطه‌ای که هیچ دو زوج مرتب متمایز آن، دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشد، **تابع** می‌گویند.

نکته ۱: رابطه‌ای تابع است که اگر نمودار پیکانی آن را رسم کنیم از هر عضو مجموعه اول، حداکثر یک پیکان خارج شود.

نکته ۲: رابطه‌ای تابع است که اگر نمودار دکارتی آن را رسم کنیم هر خط موازی با محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال ۳: از دو رابطه زیر، $R_۱$ تابع است ولی $R_۲$ تابع نمی‌باشد.

$$R_۱ = \{(۱,۲) ، (۲,۴) ، (۳,۵) ، (۴,۵)\}$$
$$R_۲ = \{(۱,۲) ، (۳,۲) ، (۴,۵) ، (۴,۲)\}$$

تعریف ۵: مجموعه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تابع f را **دامنه تابع** f می‌گویند و با D_f نشان می‌دهند. هم‌چنین مجموعه تمام مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تابع f را **برد تابع** f می‌گویند و با R_f نشان می‌دهند.

$$D_f = \{x \mid (x,y) \in f\} \quad , \quad R_f = \{y \mid (x,y) \in f\}$$

مروری بر مفهوم تابع: همه انسان‌ها مفهوم تابع را در زندگی روزانه تجربه کرده‌اند بدون اینکه به تعریف آن دقت داشته باشند. در زیر به بعضی از آنها اشاره می‌کنیم.

الف) یک دانش‌آموز دبستانی را در نظر بگیرید. کارنامه درسی او در پایان سال، مجموعه‌ای از ازواج مرتب می‌باشد. ممکن است در چند درس متفاوت، نمره‌های یکسانی کسب کرده باشد ولی او نمی‌تواند بپذیرد که برای یک درس، دو یا چند نمره متفاوت ثبت شده است. به عبارت دیگر در این کارنامه هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نمی‌باشد؛ پس کارنامه این دانش‌آموز، یک تابع است.

ب) درجه حرارت بیماری در ساعات مختلف یک روز، در جدولی ثبت شده است. در این جدول ممکن است در ساعت‌های مختلف، درجه حرارت یکسان باشد ولی هیچ کس نمی‌پذیرد که بیمار در یک ساعت مشخص، دارای بیش از یک درجه حرارت باشد. به عبارت دیگر در این جدول هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نمی‌باشد؛ پس جدول درجه حرارت بیمار، یک تابع است.

ج) اگر مساحت دایره را با s و شعاع آن را با r نمایش دهیم، بین s و r رابطه $s = \pi r^۲$ برقرار است. در این رابطه به هر عدد مثبت r فقط یک عدد حقیقی s وابسته می‌شود و امکان ندارد برای یک شعاع، مساحت‌های مختلفی به دست بیاید. پس این رابطه، یک تابع است (تمام فرمول‌های مربوط به محاسبه محیط، مساحت و حجم یک تابع است).

د) در یک آزمایشگاه عمل کشت با ۵۰۰ باکتری شروع و در هر ساعت تعداد آنها دو برابر می‌شود. اگر تعداد باکتری‌ها را پس از t ساعت، با N نمایش دهیم، داریم: $N = ۵۰۰ \times ۲^t$ در این رابطه به هر عدد طبیعی t فقط یک عدد طبیعی N وابسته می‌شود و امکان ندارد در یک ساعت، تعداد باکتری‌ها دو عدد متفاوت باشد. پس این رابطه، یک تابع است.

تذکر: ما از میان توابع، به مطالعه و بررسی توابعی می‌پردازیم که بین مؤلفه اول و مؤلفه دوم عضوهای آن، نظم خاصی برقرار باشد.

مثال ۴: نظم توابع زیر را پیدا کرده و به زبان ریاضی بنویسید.

$$f = \{(۱,۳) ، (۲,۵) ، (۳,۷) ، (۴,۹) ، (۵,۱۱) ، ...\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$g = \{(۰,۱) ، (۱,۲) ، (۲,۵) ، (۳,۱۰) ، (۴,۱۷) ، ...\} \subset \mathbb{W} \times \mathbb{N}$$

حل:

$$f = \{(x,y) \mid y = ۲x + ۱ \text{ و } x, y \in \mathbb{N}\}$$

$$g = \{(x,y) \mid y = x^۲ + ۱ \text{ و } x \in \mathbb{W} \text{ و } y \in \mathbb{N}\}$$

نمایش دیگر برای تابع: با توجه به اینکه در تابع f، به هر x یک y منحصر بفرد نسبت می‌دهیم، لذا y را با نماد $f(x)$ نشان داده و آن را ضابطه یا قانون تابع می‌نامیم. توابع f و g مثال قبل را به صورت‌های زیر نشان می‌دهیم.

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad , \quad g: \mathbb{W} \to \mathbb{N}$$
$$f(x) = ۲x + ۱ \qquad g(x) = x^۲ + ۱$$

نمایش $f: A \to B$ را می‌خوانیم: «تابع f از A به B» همچنین مجموعه A را مجموعه مبدا و مجموعه B را مجموعه مقصد می‌گویند[1] و داریم: $D_f \subset A$ و $R_f \subset B$

مثال ۵: توابع زیر را ابتدا به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نوشته‌ایم، سپس دامنه و برد هرکدام را مشخص کرده‌ایم.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$	$f = \{(۳,۱) ، (۶,۲) ، (۱۱,۳) ، (۱۸,۴) ، ...\}$
$f(x) = \sqrt{x - ۲}$	$D_f = \{۳,۶,۱۱,۱۸, ...\} \quad , \quad R_f = \mathbb{N}$

۱- در نمایش $f: A \to B$ بعضی از مؤلفین قرارداد می‌کنند: $D_f = A$. این قرارداد محاسن و معایبی دارد. از محاسن آن این است که همراه با ضابطه تابع، دامنه هم مشخص است و نیازی به عملیات اضافی برای یافتن دامنه نیست. از معایب آن این است که دیگر نمی‌توان تابع حقیقی را به صورت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ نوشت. زیرا هر وقت تابع حقیقی را بخواهیم به صورت $f: A \to B$ بنویسیم باید اول دامنه آن را مشخص کنیم، در حالی که شاید نیازی به دامنه نباشد. لازم به تذکر است در تمام مباحث این کتاب به جز توابع یک تمرین، با توابع حقیقی کار می‌کنیم.

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	$g = \{(۰,۱) ، (۱,۲) ، (-۱,۲) ، (۲,۳) ، (-۲,۳) ، ...\}$
$g(x) = \lvert x \rvert + ۱$	$D_g = \mathbb{Z} \quad , \quad R_g = \mathbb{N}$

تعریف ۶: هرگاه $f: A \to B$ یک تابع و برد آن مجموعه B باشد، یعنی داشته باشیم: $R_f = B$، آنگاه تابع f را **پوشا** می‌گویند.

مثال ۶: برای دو تابع f و g مثال قبل داریم: $R_f = \mathbb{N}$ و $R_g \neq \mathbb{Z}$. بنابراین f پوشا است ولی g پوشا نمی‌باشد.

تعریف ۷: تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را **تابع حقیقی** می‌نامیم. در توابع حقیقی تنها به ذکر ضابطه اکتفا می‌کنیم. بنابراین هرگاه تنها ضابطه تابع داده شده باشد، منظور تابع حقیقی است.

در درس‌های ریاضی و رشته‌های مختلف علوم، توابع حقیقی کاربرد فراوانی دارند؛ لذا در ادامه این فصل سعی می‌کنیم با این نوع توابع بیشتر آشنا شویم.

تعریف ۸: بزرگترین زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ که به ازای هر x در آن، $f(x)$ با معنا باشد، **دامنه تابع حقیقی** نامیده می‌شود.

مثال ۷: دامنه چند تابع در زیر مشخص شده است.

۱) $f(x) = ۲x^۲ + ۳x - ۱ \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$

۲) $g(x) = \frac{x-۱}{x^۲-۲x} \quad , \quad D_g = \{x \mid x^۲ - ۲x \neq ۰\} = \mathbb{R} - \{۰,۲\}$

۳) $h(x) = \sqrt{x^۲ + ۲x}$

$D_h = \{x \mid x^۲ + ۲x \geq ۰\} = (-\infty, -۲] \cup [۰, +\infty)$

۴) $k(x) = \frac{۱}{\sqrt[۴]{۵-\lvert x \rvert}}$

$D_k = \{x \mid ۵ - \lvert x \rvert > ۰\} = \{x \mid \lvert x \rvert < ۵\} = (-۵, ۵)$

۵) $l(x) = \sqrt{x + ۱} - \frac{۱}{\sqrt{۴-x^۲}}$

$$D_l = \left\{x \mid x+1 \geq 0 \text{ و } 4 - x^2 > 0\right\}$$
$$= \left\{x \mid x \geq -1 \text{ و } -2 < x < 2\right\} = [-1, 2)$$

۶) $e(x) = \tan x$

$$D_e = \{x \mid \cos x \neq 0\} = \left\{x \mid x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ و } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

تعریف ۹: توابع f و g را **توابع مساوی** گویند هرگاه: الف) دامنه این دو تابع مساوی باشند $(D_f = D_g = D)$ ب) برای هر $x \in D$ داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

مثال ۸: دو تابع حقیقی $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ و $g(x) = x - 1$ مساوی نیستند، زیرا دامنه‌های نابرابر دارند: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و $D_g = \mathbb{R}$ (برای $x \neq 0$ داریم: $f(x) = g(x)$)

مثال ۹: دامنه دو تابع $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد، اما داریم: $g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$

لذا ضابطه‌های دو تابع نابرابر است، در نتیجه f و g مساوی نمی‌باشند.

مثال ۱۰: دو تابع حقیقی $f(x) = \frac{x}{x^2(x-1)}$ و $g(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ مساوی می‌باشند، زیرا: $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ و برای هر $x \neq 0, 1$ داریم: $f(x) = g(x)$

تمرین

۱- توابع زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید، سپس دامنه هریک را مشخص کنید.

۱) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x - 3$

۲) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = \sqrt{-x}$

۳) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

۴) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$

۲- دامنه توابع حقیقی زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x) = \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}$

۲) $f(x) = x^4 - 3x + 1$

۳) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

۴) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x-5}$

۵) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2-x}}$

۶) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$

۷) $f(x) = \frac{2x-1}{x\sqrt{x^2-9}}$

۸) $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$

۹) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 - x}}$

۱۰) $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$

۱۱) $f(x) = \sqrt{|x-1| - 3}$

۱۲) $f(x) = \frac{2x+1}{|2x-1| - 5}$

۱۳) $f(x) = \frac{5x}{2^{|x|} - 8}$

۱۴) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{|x| - 2}$

۱۵) $f(x) = \sqrt{\frac{|x|+1}{1-x^2}}$

۱۶) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - 1}$

۱۷) $f(x) = \frac{1}{2\sin x + 1}$

۱۸) $f(x) = \tan 2x$

۳- تساوی توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x) = \tan x \cot x$, $g(x) = 1$

۲) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$, $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 - 4x}$

۳) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4(x-1)}$, $g(x) = |x - 2|$

۴) $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2}$

۵) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x(x+1)}$

۶) $f(x) = \sqrt[3]{x}\sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt[6]{x^5}$

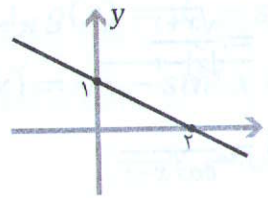
۲-۱ نمودار بعضی از توابع حقیقی و ویژگی آنها

برای رسم نمودار توابع حقیقی در این کتاب از روش نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم. هر چه تعداد نقاط انتخاب شده بیشتر باشد، شکل تابع دقیق‌تر رسم می‌شود. البته برای توابع خاص، روش‌هایی ارائه خواهیم کرد که بتوان با حداقل نقاط، آنها را رسم کرد.

۱- نمودار تابع $f(x) = ax + b$: نمودار این تابع یک خط راست می‌باشد، لذا به آن تابع خطی می‌گویند. هرخط راست را می‌توان به کمک دو نقطه آن رسم کرد. در حالت $a = ۰$ داریم: $f(x) = b$؛ این تابع را **تابع ثابت** می‌گویند و نمودار آن خطی راست، موازی محور xها می‌باشد. تابع $f(x) = x$ **را تابع همانی** می‌نامند؛ نمودار این تابع به نیمساز ناحیه اول و سوم مشهور می‌باشد.

مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۱$ را رسم کنید.

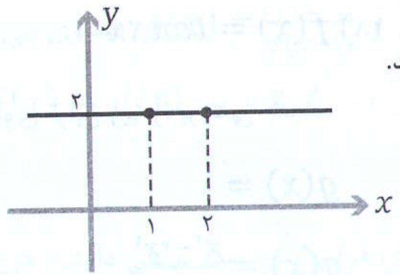
حل:



x	۰	۲
y	۱	۰

مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = ۲$ را رسم کنید.

حل:



x	۱	۲
y	۲	۲

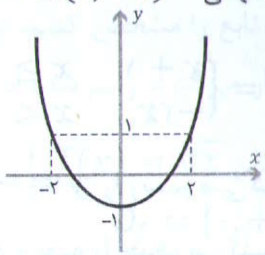
۲- نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$: با فرض $a \neq ۰$، نمودار این تابع یک سهمی می‌باشد. سهمی‌ها را می‌توان به کمک سه نقطه رسم کرد. یکی از این نقاط رأس سهمی، و دو نقطه دیگر را در دو طرف رأس انتخاب می‌کنیم. برای رسم دقیق‌تر سهمی، بهتر است که دو نقطه را نسبت به محور تقارن، قرینه انتخاب کنیم.

اگر $a > ۰$ جهت سهمی به سمت بالا و اگر $a < ۰$ جهت سهمی به سمت پایین است؛ هم‌چنین نمودار سهمی نسبت به خط $x = \frac{-b}{۲a}$ متقارن می‌باشد.

مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۱$ را رسم کنید.

حل: راس سهمی $x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۰}{۱} = ۰ \rightarrow y = f(۰) = -۱ \rightarrow S(۰, -۱)$

x	۲-	۰	۲
y	۱	۱-	۱



نکته: هر تابع به صورت $f(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \cdots + a_nx^n$ که $a_i \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$، را یک **تابع چندجمله‌ای از درجه n** یا به اختصار **تابع درجه n** می‌گویند. دامنه هرتابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۳- رسم توابع چند ضابطه‌ای: در مثال‌های زیر ابتدا با نماد و مفهوم تابع چند ضابطه‌ای و ناحیه‌های مختلف صفحه آشنا می‌شویم، سپس روش رسم این نوع توابع را بیان می‌کنیم.

مثال ۱: تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & x \leq ۱ \\ x^۲ - ۱ & ۱ < x \end{cases}$ را یک تابع دو ضابطه‌ای می‌گویند. برای این تابع داریم:

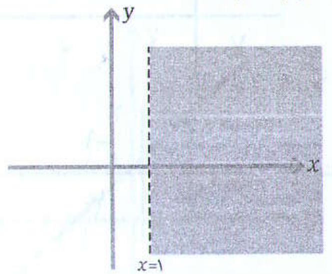
$۰ < ۱ \rightarrow f(۰) = ۲(۰) + ۱ = ۱ \quad , \quad ۱ < \sqrt{۵} \rightarrow f(\sqrt{۵}) = (\sqrt{۵})^۲ - ۱ = ۴$

$۱ = ۱ \rightarrow f(۱) = ۲(۱) + ۱ = ۳ \quad , \quad \frac{۱}{۲} < ۱ \rightarrow f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۱ = ۲$

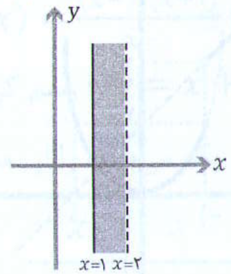
مثال ۲: ناحیه‌ای از صفحه را مشخص کنید که: الف) طول نقاط آن بزرگتر از یک باشد.

ب) طول نقاط آن از یک بزرگتر یا مساوی یک و از ۲ کوچکتر باشد.

حل:



$R = \{(x, y) | x > ۱\}$

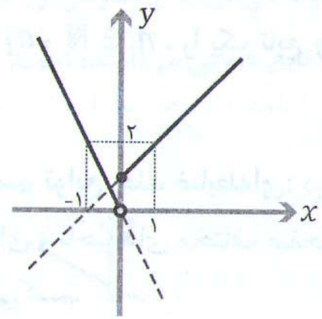


$R = \{(x, y) | ۱ \leq x < ۲\}$

نکته: برای رسم توابع چند ضابطه‌ای، هر ضابطه را به‌طور جداگانه رسم کرده و سپس آن قسمتی که در ناحیه مورد نظر باشد را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم.

مثال ۳: نمودار تابع مقابل را رسم کنید.
$$f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x \geq ۰ \\ -۲x & x < ۰ \end{cases}$$

حل: ابتدا نمودار خط‌های $y = x + ۱$ و $y = -۲x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن قسمتی که در ناحیه مورد نظر باشد را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم.



$y = x + ۱$

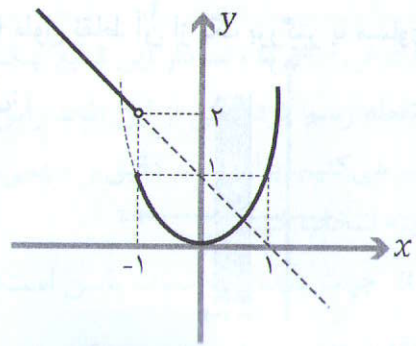
x	۰	۱
y	۱	۲

$y = -۲x$

x	۰	-۱
y	۰	۲

مثال ۴: نمودار تابع مقابل را رسم کنید.
$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq -۱ \\ ۱ - x & x < -۱ \end{cases}$$

حل: ابتدا نمودار سهمی $y = x^۲$ و خط $y = ۱ - x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن قسمتی که در ناحیه مورد نظر باشد را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم.



$y = x^۲$

x	-۱	۰	۱
y	۱	۰	۱

$y = ۱ - x$

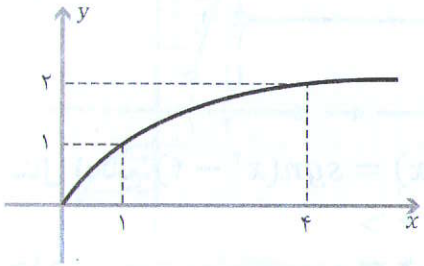
x	-۱	۰
y	۲	۱

۴- رسم چند تابع پر کاربرد: هرگاه از نمودار تابع اطلاعی نداشته باشیم، با پیدا کردن تعدادی از نقاط آن و وصل کردن آنها به یکدیگر، می‌توان نمودار را رسم کرد. قبل از رسم، باید دامنه تابع را مشخص کنیم. در مثال‌های زیر، مشابه چند نوع تابع که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد، رسم شده است.

مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کنید.

حل: $D_f = [۰, +\infty)$

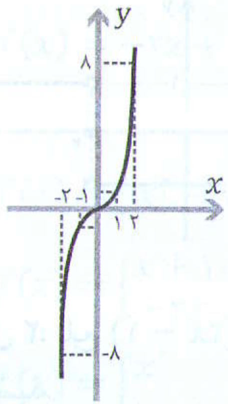
x	۰	۱	۴	۹	۱۶	...
$f(x)$	۰	۱	۲	۳	۴	...



مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = x^۳$ را رسم کنید.

حل: $D_f = \mathbb{R}$

x	...	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	...
$f(x)$	...	-۲۷	-۸	-۱	۰	۱	۸	۲۷	...

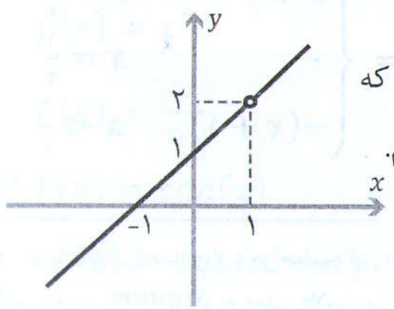


مثال ۳: نمودار تابع $f(x) = \frac{x^۲-۱}{x-۱}$ را رسم کنید.

حل: $D_f = \mathbb{R} - \{۱\}$

$$x \neq ۱ \rightarrow f(x) = \frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = x + ۱$$

ابتدا خط $y = x + ۱$ را رسم کرده، سپس نقطه‌ای که طول آن برابر یک می‌باشد را از نمودار حذف می‌کنیم.

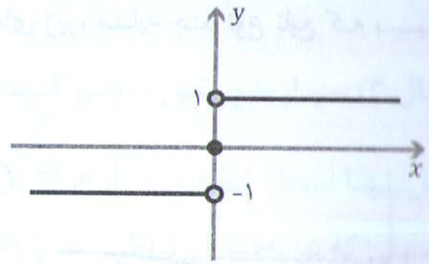


$y = x + ۱$

x	-۱	۰
y	۰	۱

۵- تابع علامت: تابع سه ضابطه‌ای زیر را تابع علامت می‌گویند و آن را با نماد $sgn(x)$ نمایش می‌دهند.[۱]

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

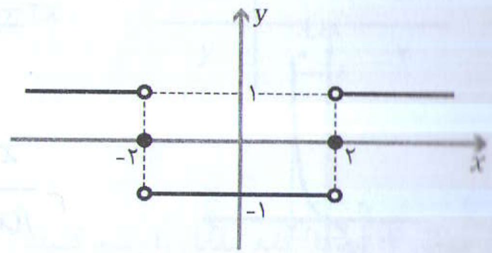


مثال ۱: تابع $f(x) = sgn(x^۲ - ۴)$ را رسم کنید.

حل:

$$f(x) = sgn(x^۲ - ۴) = \begin{cases} ۱ & x^۲ - ۴ > ۰ \\ ۰ & x^۲ - ۴ = ۰ \\ -۱ & x^۲ - ۴ < ۰ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۱ & x < -۲ \text{ یا } ۲ < x \\ ۰ & x = \pm ۲ \\ -۱ & -۲ < x < ۲ \end{cases}$$



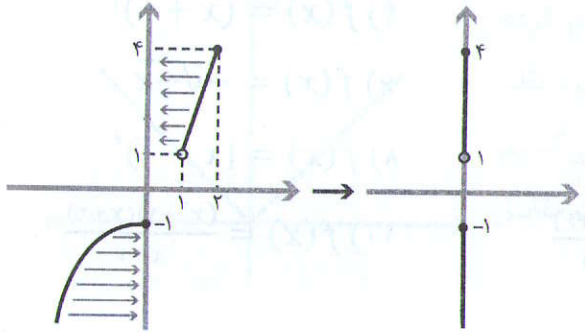
مثال ۲: تابع $f(x) = (x + ۱)sgn(۲x - ۱)$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید.

حل:

$$f(x) = (x + ۱)\begin{cases} ۱ & ۲x - ۱ > ۰ \\ ۰ & ۲x - ۱ = ۰ \\ -۱ & ۲x - ۱ < ۰ \end{cases} = \begin{cases} x + ۱ & x > \frac{۱}{۲} \\ ۰ & x = \frac{۱}{۲} \\ -(x + ۱) & x < \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۱- نماد sgn را «ساین x» می‌خوانیم. این نماد از کلمه انگلیسی $Sign$ گرفته شده است که ریشه اصلی آن، کلمه یونانی $Signum$ به معنی علامت می‌باشد.

۶- تعیین برد تابع به کمک نمودار: درحالت کلی تعیین برد تابع، کار دشواری است. یکی از روش‌های ساده برای تعیین برد تابع حقیقی، کمک گرفتن از نمودار آن می‌باشد. برای این منظور، کافی است تصویر نمودار را بر روی محور yها در نظر بگیریم. به عنوان نمونه، برد یک تابع از روی نمودار آن، در زیر مشخص شده است.



$$R_f = (-\infty, -۱] \cup (۱, ۴]$$

مثال ۱: برد توابعی که در مثال‌های قبل نمودار آنها رسم شد، به صورت زیر می‌باشد.

۱) $f(x) = -۲x + ۱$, $R_f = \mathbb{R}$

۲) $f(x) = ۲$, $R_f = \{۲\}$

۳) $f(x) = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۱$, $R_f = [-۱, +\infty)$

۴) $f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x \geq ۰ \\ -۲x & x < ۰ \end{cases}$, $R_f = (۰, +\infty)$

۵) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ ۱ - x & x < ۰ \end{cases}$, $R_f = [۰, +\infty)$

۶) $f(x) = \sqrt{x}$, $R_f = [۰, +\infty)$

۷) $f(x) = x^۳$, $R_f = \mathbb{R}$

۸) $f(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱}$, $R_f = \mathbb{R} - \{۲\}$

۹) $f(x) = sgn(x)$, $R_f = \{-۱, ۰, ۱\}$

۱۰) $f(x) = sgn(x^۲ - ۴)$, $R_f = \{-۱, ۰, ۱\}$

تمرین

۱- نمودار هر تابع را رسم و به کمک آن، برد تابع را مشخص کنید.

۱) $f(x) = -2x + 1$ ۲) $f(x) = 2x^2 - 4x$

۳) $f(x) = (x-1)(2-x)$ ۴) $f(x) = (x+1)^2$

۵) $f(x) = \sqrt{x-2}$ ۶) $f(x) = -\sqrt{-x}$

۷) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ۸) $f(x) = (x-1)^3$

۹) $f(x) = \frac{(x^2-4x+3)(x^2-5x+6)}{(x-3)(x^2-3x+2)}$ ۱۰) $f(x) = \frac{(x^2-1)(x+2)}{x+1}$

۲- نمودار توابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = \begin{cases} 2 & 1 \le x \\ x & -1 < x < 1 \\ -2 & x \le -1 \end{cases}$ ۲) $f(x) = \begin{cases} x-1 & 2 < x \\ 1 & -2 \le x \le 2 \\ -x-1 & x < -2 \end{cases}$

۳) $f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \le x \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ ۴) $f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \le x \\ 2x+1 & x < -1 \end{cases}$

۵) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & 0 < x \\ x^2+x & x \le 0 \end{cases}$ ۶) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 1 \le x \\ -x & x < 1 \end{cases}$

۳- با توجه به تعریف تابع علامت، توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = sgn(9-x^2)$ ۲) $f(x) = x\,sgn(x+1)$

۳) $f(x) = x^2 + sgn(x)$ ۴) $f(x) = sgn(x-1) + sgn(2-x)$

۴- مقادیر a ، b و c را چنان تعیین کنید که نمودار تابع f ، از نقاط داده شده بگذرد.

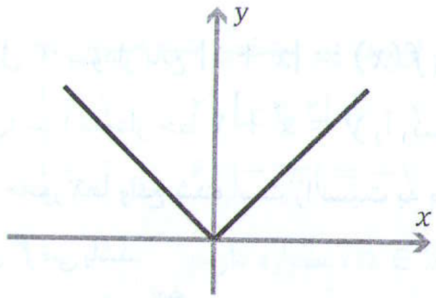
۱) $f(x) = 3x^2 + ax - 2b$ $A(1,-1)$ ، $B(2,1)$

۲) $f(x) = 2x^3 - ax^2 + bx + c$ $A(-1,4)$ ، $B(1,2)$ ، $C(0,1)$

۷- تابع قدر مطلق: تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه‌ای به صورت زیر است.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

برای رسم نمودار این تابع، دو تابع $y = x$ و $y = -x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم و نیمساز ناحیه دوم و چهارم) را رسم کرده، سپس آن قسمتی که در ناحیه مورد نظر باشد را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم. در پایان نمودار این تابع به صورت مقابل می‌شود.



مثال ۱: تابع $f(x) = |2x - 4|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید.

حل:

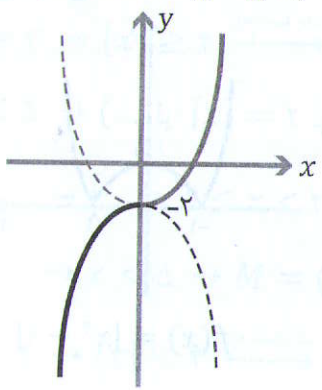
$$f(x) = |2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & 2x-4 \ge 0 \\ -(2x-4) & 2x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & x \ge 2 \\ -2x+4 & x < 2 \end{cases}$$

مثال ۲: تابع $f(x) = x|x| - 2$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید، سپس نمودار آن را رسم کنید.

حل:

$$f(x) = -2 + x\begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2 + x^2 & x \ge 0 \\ -2 - x^2 & x < 0 \end{cases}$$

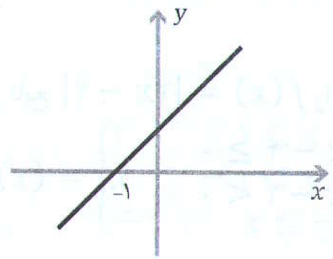
برای رسم نمودار این تابع، دو تابع $y = x^2 - 2$ و $y = -x^2 - 2$ که دو سهمی می‌باشند را رسم کرده، سپس آن قسمتی که در ناحیه مورد نظر باشد را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم. در پایان نمودار این تابع به صورت مقابل می‌شود.



نکته: هرگاه نمودار تابع $g(x)$ داده شده باشد و نمودار تابع $f(x) = |g(x)|$ را لازم داشته باشیم، کافی است قسمتی از نمودار g که در زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه کنیم. شکل جدید، نمودار تابع f می‌باشد.

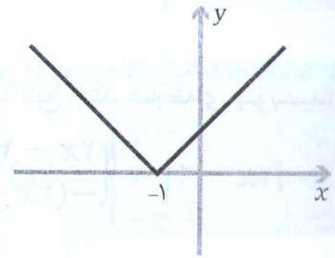
مثال ۳: نمودار تابع $f(x) = |x + ۱|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار خط $y = x + ۱$ را رسم می‌کنیم؛ سپس قسمتی از خط را که در زیر محور xها واقع شده است را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. شکل جدید، نمودار تابع f می‌باشد.



$y = x + ۱$

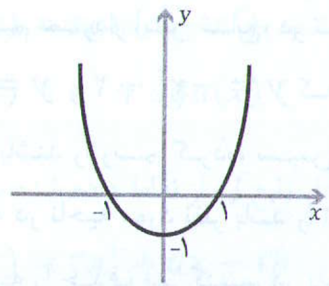
$\rightarrow$



$f(x) = |x + ۱|$

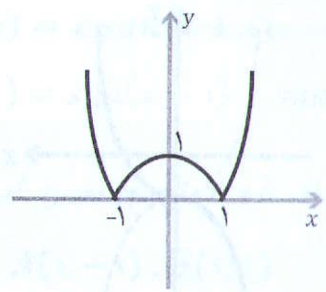
مثال ۴: نمودار تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار سهمی $y = x^۲ - ۱$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از سهمی را که در زیر محور xها واقع شده است را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. شکل جدید، نمودار تابع f می‌باشد.



$y = x^۲ - ۱$

$\rightarrow$



$f(x) = |x^۲ - ۱|$

۸- تابع جزء صحیح: ابتدا مفهوم جزء صحیح یک عدد را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱: برای هر عدد حقیقی x، عددی صحیح مانند n موجود است به‌طوری‌که: $n \leq x < n + ۱$. عدد n را **جزء صحیح** x گوییم و با نماد $[x] = n$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱: جزء صحیح چند عدد بر اساس تعریف آن، در زیر مشخص شده است.

۱) $[۲] = ۲$ ۲) $[-۳/۲] = -۴$ ۳) $[۴/۵] = ۴$ ۴) $[e] = ۲$

۵) $\left[\frac{۵}{۲}\right] = ۲$ ۶) $[-۲\pi] = -۷$ ۷) $\left[\frac{\pi}{۲}\right] = ۱$ ۸) $[\sqrt{۳}] = ۱$

خواص مهم جزء صحیح: هرگاه $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}$، همواره داریم:

۱) $[x + n] = [x] + n$ ۲) $[x] \leq x < [x] + ۱$ ۳) $x - ۱ < [x] \leq x$

مثال ۲: مجموعه جواب معادلات و نامعادلات زیر را به‌دست آورید.

۱) $[x] = ۳ \rightarrow ۳ \leq x < ۴ \rightarrow M = [۳, ۴)$

۲) $\left[\frac{x-۱}{۲}\right] = ۱ \rightarrow ۱ \leq \frac{x-۱}{۲} < ۲ \rightarrow ۳ \leq x < ۵ \rightarrow M = [۳, ۵)$

۳) $۲[۲x + ۱] = ۳ \rightarrow [۲x + ۱] = \frac{۳}{۲} \rightarrow M = \emptyset$ (زیرا $\frac{۳}{۲} \notin \mathbb{Z}$)

۴) $[x] \geq ۳ \rightarrow ($ $[x] = ۳$ یا $[x] = ۴$ یا $[x] = ۵$ یا ... $)$

$\rightarrow ($ $۳ \leq x < ۴$ یا $۴ \leq x < ۵$ یا $۵ \leq x < ۶$ یا ... $)$

$\rightarrow ۳ \leq x \rightarrow M = [۳, +\infty)$

۵) $[x] > ۳ \rightarrow [x] \geq ۴ \xrightarrow{\text{مشابه قسمت قبل}} x \geq ۴ \rightarrow M = [۴, +\infty)$

۶) $[x] < ۵ \rightarrow ($ ... یا $[x] = ۲$ یا $[x] = ۳$ یا $[x] = ۴$ $)$

$\rightarrow ($ ... یا $۲ \leq x < ۳$ یا $۳ \leq x < ۴$ یا $۴ \leq x < ۵$ $)$

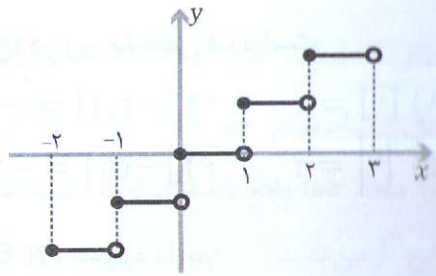
$\rightarrow x < ۵ \rightarrow M = (-\infty, ۵)$

۷) $[x] \leq ۲ \rightarrow [x] < ۳ \xrightarrow{\text{مشابه قسمت قبل}} x < ۳ \rightarrow M = (-\infty, ۳)$

- با ذکر چند مثال، با روش رسم توابع شامل جزء صحیح آشنا می‌شویم، این نوع توابع دارای تعداد نامتناهی ضابطه هستند، لذا ما قسمتی از آنها را رسم می‌کنیم.

مثال ۳: نمودار تابع $f(x)=[x]$ به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x)=[x]=\begin{cases} \vdots & \\ -2 & -2\le x<-1 \\ -1 & -1\le x<0 \\ 0 & 0\le x<1 \\ 1 & 1\le x<2 \\ 2 & 2\le x<3 \\ \vdots & \end{cases}$$

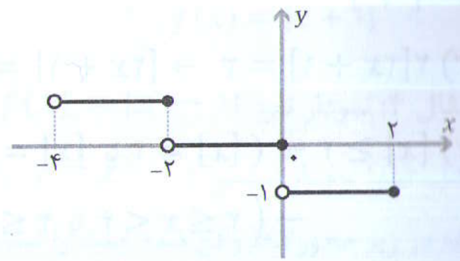


مثال ۴: نمودار تابع $f(x)=\left[-\frac{x}{2}\right]$ را در یک فاصله دلخواه رسم کنید.

حل:

$$f(x)=\begin{cases} \vdots & \\ -1 & -1\le -\frac{x}{2}<0 \\ 0 & 0\le -\frac{x}{2}<1 \\ 1 & 1\le -\frac{x}{2}<2 \\ \vdots & \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \vdots & \\ -1 & 0<x\le 2 \\ 0 & -2<x\le 0 \\ 1 & -4<x\le -2 \\ \vdots & \end{cases}$$

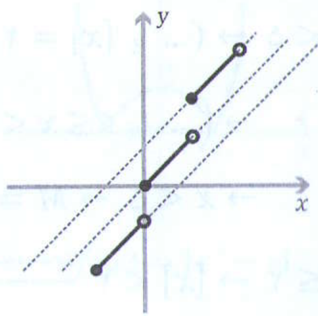


مثال ۵: نمودار تابع $f(x)=x+[x]$ را در فاصله $[-1,2)$ رسم کنید.

حل:

$$f(x)=x+\begin{cases} -1 & -1\le x<0 \\ 0 & 0\le x<1 \\ 1 & 1\le x<2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x-1 & -1\le x<0 \\ x & 0\le x<1 \\ x+1 & 1\le x<2 \end{cases}$$



۹- انتقال توابع:

هرگاه نمودار تابع $f(x)$ داده شده باشد و a یک عدد مثبت باشد با انتقال نمودار تابع $f(x)$، توابع زیر را می‌توان رسم کرد.

۱) **نمودار تابع $y=f(x)+a$**: نمودار f به اندازه a واحد به موازات محور yها به سمت **بالا** منتقل می‌شود.

۲) **نمودار تابع $y=f(x)-a$**: نمودار f به اندازه a واحد به موازات محور yها به سمت **پایین** منتقل می‌شود.

۳) **نمودار تابع $y=f(x+a)$**: نمودار f به اندازه a واحد به موازات محور xها به سمت **چپ** منتقل می‌شود.

۴) **نمودار تابع $y=f(x-a)$**: نمودار f به اندازه a واحد به موازات محور xها به سمت **راست** منتقل می‌شود.

۵) **نمودار تابع $y=-f(x)$**: نمودار تابع f نسبت به **محور xها قرینه** می‌شود.

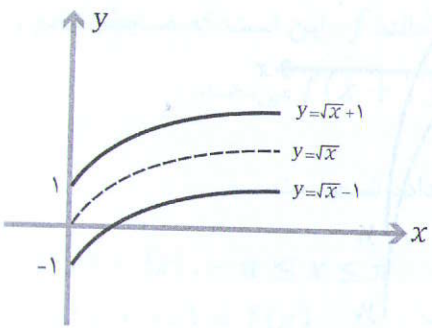
۶) **نمودار تابع $y=f(-x)$**: نمودار تابع f نسبت به **محور yها قرینه** می‌شود.

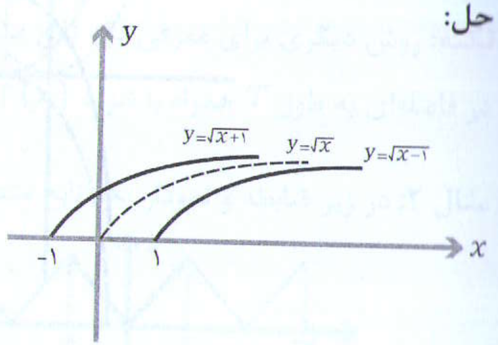
مثال ۱: با توجه به نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

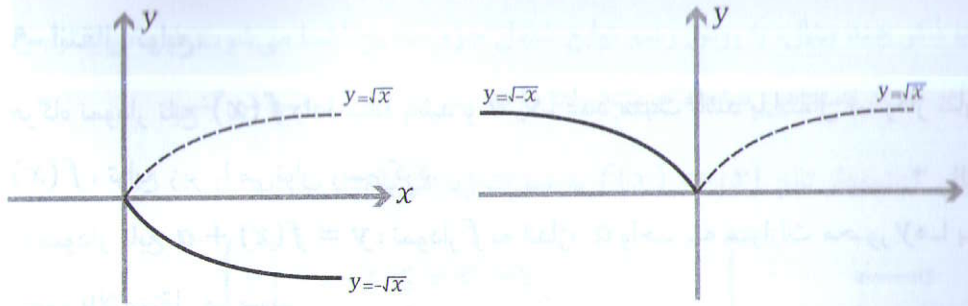
۱) $y=\sqrt{x}+1$ ۲) $y=\sqrt{x}-1$ ۳) $y=\sqrt{x-1}$

۴) $y=\sqrt{x+1}$ ۵) $y=-\sqrt{x}$ ۶) $y=\sqrt{-x}$

حل:







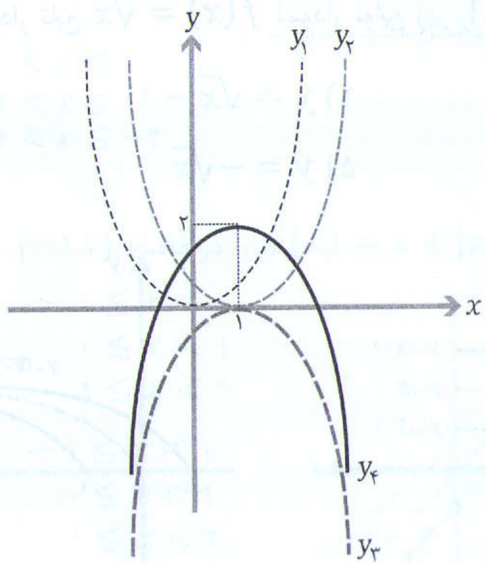
مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = ۲ - (x-۱)^۲$ را به کمک انتقال رسم کنید.

حل: الف) نمودار تابع $y_۱ = x^۲$ را رسم می‌کنیم.

ب) نمودار تابع $y_۱$ را به اندازه یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $y_۲ = (x-۱)^۲$ به‌دست آید.

ج) نمودار تابع $y_۲$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y_۳ = -(x-۱)^۲$ حاصل شود.

د) نمودار تابع $y_۳$ را به اندازه ۲ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $y_۴ = ۲ - (x-۱)^۲$ حاصل شود.



۱۰- تابع متناوب:

تعریف ۱: تابع f را **متناوب** گوییم هرگاه عددی حقیقی مانند $t \neq ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $x + t \in D_f$ و $f(x+t) = f(x)$

کوچکترین عددحقیقی مثبت t را در صورت وجود، **دوره تناوب اصلی** تابع f گوییم و با T نمایش می‌دهیم.

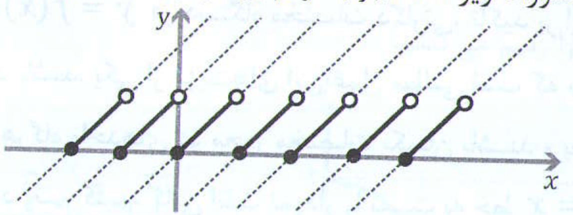
نکته: ویژگی مهم توابع متناوب این است که نمودار تابع در فاصله‌های متوالی به طول T تکرار می‌شود. لذا برای رسم این توابع، نمودار را در یک فاصله به طول دوره تناوب رسم کرده، سپس شکل به‌دست آمده را در فاصله‌های مشابه تکرار می‌کنیم.

مثال ۱: دامنه تابع $f(x) = x - [x]$ برابر $\mathbb{R}$ است و برای هر $n \in \mathbb{Z}$ (بنابر خاصیت‌های جزء صحیح یک عدد) داریم:

$$f(x+n) = (x+n) - [x+n] = (x+n) - ([x]+n) = x - [x] = f(x)$$

بنابراین تابع f متناوب و هر عدد صحیح غیر صفر n، دوره تناوب این تابع می‌باشد. چون کوچکترین عدد صحیح مثبت، عدد یک می‌باشد، پس دوره تناوب اصلی $T = ۱$ است.

نمودار این تابع به صورت زیر است (جزئیات رسم این نمودار را در تمرین‌ها، به خواننده واگذار کرده‌ایم).

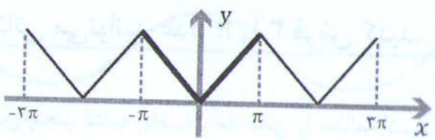


نکته: روش دیگری برای معرفی یک تابع متناوب مانند f، این است که ضابطه تابع را در فاصله‌ای به طول T همراه با شرط $f(x+T) = f(x)$ می‌دهند.

مثال ۲: در زیر ضابطه و نمودار یک تابع متناوب داده شده است.

$f(x) = |x|\,،\, -\pi \leq x \leq \pi$

$f(x + ۲\pi) = f(x)$



۱- نمودار توابع اساسی مثلثاتی:

بر اساس تعریف نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت به کمک دایره مثلثاتی، توابع زیر متناوب هستند و دارای دوره تناوب اصلی می‌باشند.

۱) $f(x) = \sin x \quad , \quad T = ۲\pi$ ۲) $f(x) = \cos x \quad , \quad T = ۲\pi$

۳) $f(x) = \tan x \quad , \quad T = \pi$ ۴) $f(x) = \cot x \quad , \quad T = \pi$

مثال ۱: نشان دهید تابع $f(x) = \sin(۳x + ۱)$ متناوب است و دوره تناوب اصلی تابع f را پیدا کنید.

حل: برای تابع f داریم: $D_f = \mathbb{R}$، فرض کنید f متناوب و t دوره تناوب باشد. لذا داریم:

$$f(x+t) = f(x) \to \sin[۳(x+t)+۱] = \sin(۳x+۱)$$
$$\to \sin(۳x + ۱ + ۳t) = \sin(۳x + ۱)$$

برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید داشته باشیم: $۳t = ۲k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$ در نتیجه $t = \frac{۲k\pi}{۳}$. بنابراین f متناوب است و دوره تناوب اصلی به ازای $k = ۱$ به دست می‌آید: $T = \frac{۲\pi}{۳}$

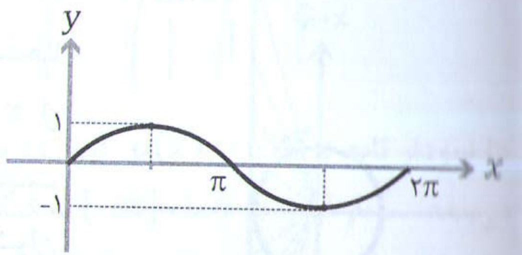
نکته: در رسم تابع $y = f(x)$ در دستگاه مختصات دکارتی، تأکید بر این است که x و y بر حسب یک واحد باشند. یکی از مزیت‌های این عمل مطلبی است که در مباحث بعدی به آن می‌پردازیم: «هرگاه واحدهای دو محور مختصات یکسان باشند و بخواهیم معکوس تابع را در صورت وجود رسم کنیم، کافی است نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم». در بحث توابع مثلثاتی، به معکوس این توابع نیاز داریم. بنابراین برای اینکه راحت‌تر بتوانیم این توابع را بشناسیم و با آنها کار کنیم، x را برحسب رادیان انتخاب می‌کنیم، زیرا رادیان واحدی برای اندازه‌گیری زاویه برحسب طول می‌باشد [1].

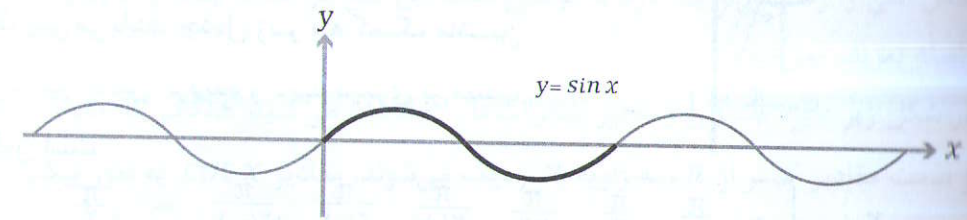
تذکر: برای سهولت در رسم توابع مثلثاتی می‌توانید عدد π را ۳ فرض کنید.

۱- برای آشنایی با واحد رادیان، بخش یکم از فصل پنجم کتاب ریاضیات مقدماتی را مطالعه کنید.

الف) نمودار تابع $f(x) = \sin x$: این تابع متناوب با دوره تناوب اصلی $T = ۲\pi$ می‌باشد. ابتدا نمودار آن را در فاصله $[۰, ۲\pi]$ به کمک روش نقطه‌یابی رسم کرده و سپس شکل کلی را رسم می‌کنیم.

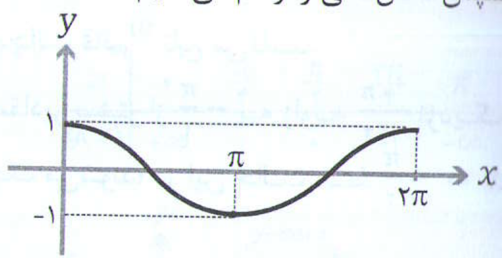
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$f(x)=\sin x$	۰	۱	۰	۱-	۰

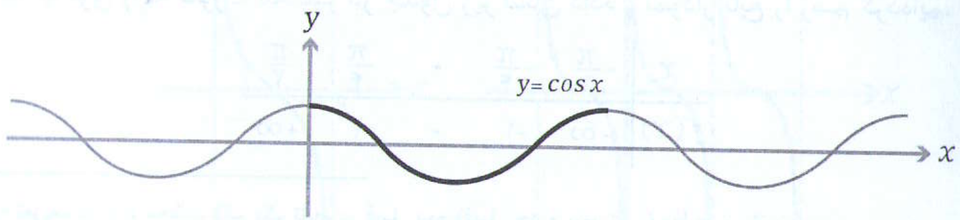




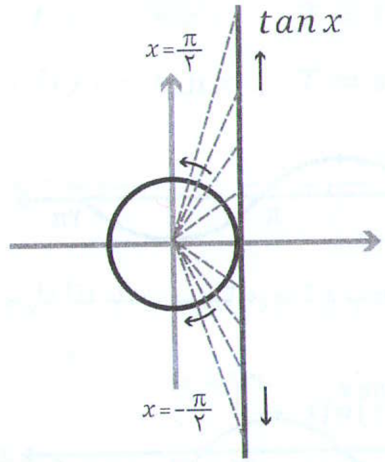
ب) نمودار تابع $f(x) = \cos x$: این تابع متناوب با دوره تناوب اصلی $T = ۲\pi$ می‌باشد. ابتدا نمودار آن را در فاصله $[۰, ۲\pi]$ به کمک روش نقطه‌یابی رسم کرده و سپس شکل کلی را رسم می‌کنیم.

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$f(x)=\cos x$	۱	۰	۱-	۰	۱





ج) نمودار تابع $f(x) = tan\,x$: این تابع متناوب با دوره تناوب اصلی $T = \pi$ می‌باشد. نمودار آن را در فاصله $[\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ به کمک روش نقطه‌یابی رسم کرده و سپس شکل کلی را رسم می‌کنیم. لازم به توضیح است این تابع در نقاط ابتدا و انتهای این فاصله تعریف نمی‌شود.



در شکل مقابل دایره مثلثاتی و محور تانژانت‌ها را مشاهده می‌کنید. هنگامی‌که مقادیر x از سمت مقادیر کمتر از $\frac{\pi}{۲}$، به زاویه $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می‌شوند، مقادیر $tan\,x$ به طور بیکران افزایش می‌یابند. جدول زیر به کمک ماشین حساب تکمیل گردیده و تأیید دیگری بر مطلب فوق است.

x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲/۱}$	$\frac{\pi}{۲/۰۱}$	$\frac{\pi}{۲/۰۰۱}$	$\frac{\pi}{۲/۰۰۰۱}$	...	$\frac{\pi}{۲}$
$f(x)=tan\,x$	۰	۱	۱/۷۳	۱۳/۳	۱۲۷/۹	۱۲۷۳/۸	۱۲۷۳۳/۰		(تعریف نشده)

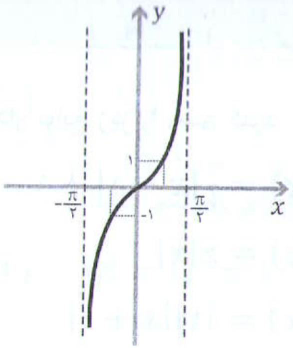
اگر نقاط جدول فوق را در دستگاه مختصات دکارتی انتخاب و به هم وصل کنید مشاهده خواهید کرد که فاصله نمودار با خط $x = \frac{\pi}{۲}$ کاهش پیدا می‌کند ولی آن را قطع نمی‌کند؛ در چنین حالتی خط $x = \frac{\pi}{۲}$ را **مجانب قائم**[1] تابع می نامند.

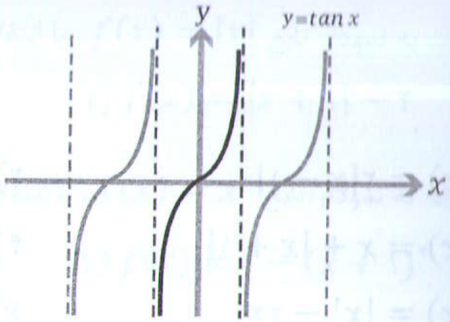
به‌طور مشابه هنگامی‌که مقادیر x از سمت مقادیر بیشتر از $-\frac{\pi}{۲}$ به زاویه $-\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می شوند مقادیر $tan\,x$ به‌طور بیکران کوچک می‌شوند؛ در این حالت خط $x = -\frac{\pi}{۲}$ مجانب قائم تابع می‌باشد.

مطالب فوق را به صورت مختصر در جدول زیر نشان داده و نمودار تابع را رسم کرده‌ایم.

x	$-\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{\pi}{۴}$	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$
$f(x)$	$-\infty$	۱-	۰	۱	$+\infty$

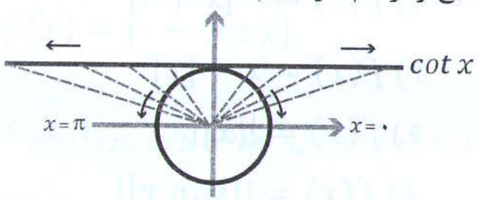
۱- تعریف دقیق‌تر مجانب قائم یک تابع، در فصل دوم (فصل حد و پیوستگی) مطرح می‌شود.



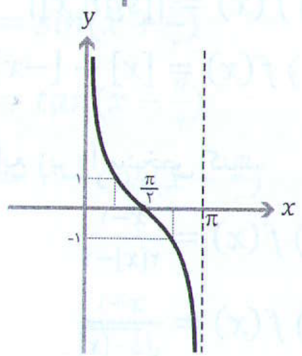


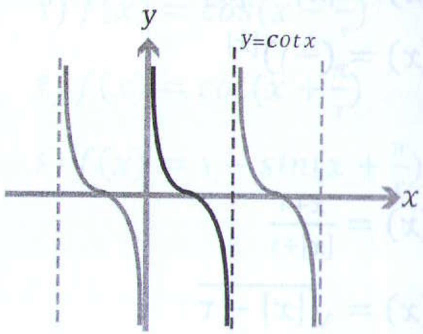
د) نمودار تابع $g(x) = cot\,x$: این تابع متناوب با دوره تناوب اصلی $T = \pi$ می‌باشد. نمودار آن را در فاصله $[۰, \pi]$ به کمک روش نقطه‌یابی رسم کرده و سپس شکل کلی را رسم می‌کنیم. لازم به توضیح است این تابع در نقاط ابتدا و انتهای این فاصله تعریف نمی‌شود.

در شکل زیر دایره مثلثاتی و محور کتانژانت‌ها را مشاهده می‌کنید. هنگامی‌که مقادیر x از سمت مقادیر کمتر از π، به زاویه π نزدیک می‌شوند، مقادیر $cot\,x$ به طور بیکران کاهش می‌یابند و هنگامی‌که مقادیر x از سمت مقادیر بیشتر از صفر، به زاویه صفر نزدیک می‌شوند، مقادیر $cot\,x$ به طور بیکران افزایش می‌یابند. در چنین حالتی خط‌های $x = ۰$ و $x = \pi$ مجانب‌های قائم تابع هستند. مطالب فوق را به صورت مختصر در جدول زیر نشان داده و نمودار تابع را رسم کرده‌ایم.



x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
$g(x)$	$+\infty$	۱	۰	۱-	$-\infty$





تمرین

۱- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = 2|x-1|$ ۲) $f(x) = \frac{1}{2}|x-1| + 1$

۳) $f(x) = x + |x+1|$ ۴) $f(x) = x|x|$

۵) $f(x) = |x^2 - 4x|$ ۶) $f(x) = |x||x+1|$

۷) $f(x) = |x| - |x-1|$ ۸) $f(x) = 2|x| + |x-1|$

۲- معادلات زیر را حل کنید.

۱) $[2x+1] = 5$ ۲) $\left[\frac{x-3}{2}\right] = -1$ ۳) $-2[x^2+3] = 1$

۴) $\big[x + [x]\big] = 4$ ۵) $[|x|] = 0$ ۶) $|[x]| = 1$

۳- نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $[x] \geq 2$ ۲) $[x] > -2$ ۳) $[x] \leq 5$ ۴) $[x] < -5$

۴- نمودار توابع زیر را در یک فاصله دلخواه و مناسب رسم کنید.

۱) $f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right]$ ۲) $f(x) = -[x+1]$

۳) $f(x) = -2[x] + 1$ ۴) $f(x) = x - [x]$

۵) $f(x) = x[x]$ ۶) $f(x) = |[x]|$

۷) $f(x) = |x| - [x]$ ۸) $f(x) = |[sgn\, x]|$

۹) $f(x) = (-1)^{[x]}$ ۱۰) $f(x) = [x] + [-x]$

۵- دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x) = \frac{x+1}{[x]+1}$ ۲) $f(x) = \frac{x-1}{2[x]-1}$

۳) $f(x) = \sqrt{[x] - 3}$ ۴) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{5-[x]}}$

۶- با توجه به نمودار تابع $f(x) = |x|$ ، با انتقال توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = -|x| + 2$ ۲) $f(x) = |x+1| - 2$

۷- با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^2$ ، با انتقال توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = (x-1)^2 - 1$ ۲) $f(x) = 2 - (x+1)^2$

۸- نمودار توابع متناوب زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = x \ ، \ -\pi < x \leq \pi$ ، $f(x + 2\pi) = f(x)$

۲) $f(x) = x^2, \ -1 \leq x < 1$ ، $f(x+2) = f(x)$

۹- ثابت کنید توابع زیر متناوب هستند و دوره تناوب اصلی آنها را معرفی کنید.

۱) $f(x) = sin(4x+1)$ ۲) $f(x) = tan(-2x)$

۱۰- نمودار توابع زیر را در یک فاصله به طول دوره تناوب، رسم کنید.

۱) $f(x) = 1 - sin\, x$ ۲) $f(x) = 2\, cos\, x + 1$

۳) $f(x) = \frac{1}{2} cot\, x$ ۴) $f(x) = -\,tan\, x$

۵) $f(x) = |1 - cos\, x|$ ۶) $f(x) = \left|\frac{1}{2} - sin\, x\right|$

۱۱- با توجه به نمودار توابع اساسی مثلثات و به کمک انتقال، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = sin(x + \frac{\pi}{2})$ ۲) $f(x) = cos(x - \frac{\pi}{2})$

۳) $f(x) = tan(x - \frac{\pi}{2})$ ۴) $f(x) = cot(x + \frac{\pi}{2})$

۵) $f(x) = 1 - cos(x - \frac{\pi}{3})$ ۶) $f(x) = 1 - sin(x + \frac{\pi}{3})$

۱۲- اعمال روی توابع:

تعریف ۱: هرگاه f و g دو تابع با دامنه های D_f و D_g باشند توابع جدیدی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad , \quad D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \quad , \quad D_{f-g}=D_f\cap D_g$$

$$(f.g)(x)=f(x)\,g(x) \quad , \quad D_{f.g}=D_f\cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)} \quad , \quad D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x \mid f(x)=۰\}$$

مثال ۱: هرگاه $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{۲-x}$ ضابطه و دامنه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$D_f=\{x \mid x-۱\geq ۰\}=[۱,+\infty)$$

$$D_g=\{x \mid ۲-x\geq ۰\}=(-\infty,۲]$$

$$D_f\cap D_g=[۱,+\infty)\cap(-\infty,۲]=[۱,۲]$$

$$(f+g)(x)=\sqrt{x-۱}+\sqrt{۲-x} \quad , \quad D_{f+g}=[۱,۲]$$

$$(f-g)(x)=\sqrt{x-۱}-\sqrt{۲-x} \quad , \quad D_{f-g}=[۱,۲]$$

$$(f.g)(x)=\sqrt{x-۱}\sqrt{۲-x} \quad , \quad D_{f.g}=[۱,۲]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۲-x}} \quad , \quad D_{\frac{f}{g}}=[۱,۲]-\{۲\}=[۱,۲)$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{\sqrt{۲-x}}{\sqrt{x-۱}} \quad , \quad D_{\frac{g}{f}}=[۱,۲]-\{۱\}=(۱,۲]$$

مثال ۲: توابع f و g داده شده است، ضابطه تابع $f+۲g$ را به‌دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x\leq ۵\\ x^۲-۱ & ۵<x\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}۴x+۳ & x<۲\\ ۳x-۱ & ۲\leq x\end{cases}$$

حل: ابتدا مجموعه اعداد حقیقی را با توجه به ضابطه‌های توابع f و g به صورت اجتماع سه فاصله جدا از هم می‌نویسیم: $\mathbb{R}=(-\infty,۲)\cup[۲,۵]\cup(۵,+\infty)$

سپس مجموع توابع f و $۲g$ را در هر یک از این فاصله‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$(f+۲g)(x)=\begin{cases}(۲x-۱)+۲(۴x+۳) & x<۲\\ (۲x-۱)+۲(۳x-۱) & ۲\leq x\leq ۵\\ (x^۲-۱)+۲(۳x-۱) & ۵<x\end{cases}=\begin{cases}۱۰x+۵ & x<۲\\ ۸x-۳ & ۲\leq x\leq ۵\\ x^۲+۶x-۳ & ۵<x\end{cases}$$

تعریف ۲: ترکیب دو تابع f و g با دامنه‌های D_f و D_g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$fog(x)=f[g(x)] \quad , \quad D_{fog}=\left\{x \mid x\in D_g \text{ و } g(x)\in D_f\right\}$$

$$gof(x)=g[f(x)] \quad , \quad D_{gof}=\left\{x \mid x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\right\}$$

مثال ۳: هرگاه داشته باشیم: $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ ، ضابطه و دامنه توابع fog ، gof و gog را مشخص کنید.

حل: ابتدا دامنه توابع f و g را مشخص می‌کنیم: $D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=[۱,+\infty)$

۱) $fog(x)=f[g(x)]=[g(x)]^۲=\left(\sqrt{x-۱}\right)^۲=x-۱$

$$D_{fog}=\left\{x \mid x\in D_g \text{ و } g(x)\in D_f\right\}=\left\{x \mid x\geq ۱ \text{ و } \sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}\right\}=[۱,+\infty)$$

۲) $gof(x)=g[f(x)]=\sqrt{f(x)-۱}=\sqrt{x^۲-۱}$

$$D_{gof}=\left\{x \mid x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\right\}=\left\{x \mid x\in\mathbb{R} \text{ و } x^۲\geq ۱\right\}=\mathbb{R}-(-۱,۱)$$

۳) $gog(x)=g[g(x)]=\sqrt{g(x)-۱}=\sqrt{\sqrt{x-۱}-۱}$

$$D_{gog}=\left\{x \mid x\in D_g \text{ و } g(x)\in D_g\right\}=\left\{x \mid x\geq ۱ \text{ و } \sqrt{x-۱}\geq ۱\right\}=[۲,+\infty)$$

نکته: تعیین دامنه تابع مرکب fog از روی ضابطه آن به دلیل ساده شدن عبارت‌ها در محاسبات جبری، در بعضی مواقع درست نمی‌باشد (مانند تعیین دامنه fog از روی ضابطه در مثال قبل و مثال بعد). از طرف دیگر استفاده از تعریف برای تعیین دامنه، همواره کار ساده‌ای نمی‌باشد. هرگاه ضابطه دو تابع f و g را در اختیار داشته باشیم می‌توان با نام گذاری $fog(x) = h(x)$ و از رابطه $D_{fog} = D_h \cap D_g$، دامنه fog را ساده‌تر به‌دست آورد.

مثال ۴: هرگاه داشته باشیم: $f(x) = \frac{x}{x-1}$ و $g(x) = \frac{1}{x+2}$، ضابطه و دامنه توابع fog، gof و gog را مشخص کنید.

حل: در این مثال برای یافتن دامنه توابع مرکب از نکته قبل استفاده می‌کنیم.

دامنه توابع f و g به صورت مقابل است: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}\,,\ D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$1)\ fog(x) = f[g(x)] = \frac{g(x)}{g(x)-1} = \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x+2}-1} = \frac{-1}{x+1}$$

$$h(x) = \frac{-1}{x+1} \to D_h = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$D_{fog} = D_h \cap D_g = (\mathbb{R} - \{-1\}) \cap (\mathbb{R} - \{-2\}) = \mathbb{R} - \{-1\,, -2\}$$

$$2)\ gof(x) = g[f(x)] = \frac{1}{f(x)+2} = \frac{1}{\frac{x}{x-1}+2} = \frac{x-1}{3x-2}$$

$$h(x) = \frac{x-1}{3x-2} \to D_h = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$D_{gof} = D_h \cap D_f = \left(\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}\right) \cap (\mathbb{R} - \{1\}) = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$$

$$3)\ gog(x) = g[g(x)] = \frac{1}{g(x)+2} = \frac{1}{\frac{1}{x+2}+2} = \frac{1}{\frac{2x+5}{x+2}} = \frac{x+2}{2x+5}$$

$$h(x) = \frac{x+2}{2x+5} \to D_h = \mathbb{R} - \left\{\frac{-5}{2}\right\}$$

$$D_{gog} = D_h \cap D_g = \left(\mathbb{R} - \left\{\frac{-5}{2}\right\}\right) \cap (\mathbb{R} - \{-2\}) = \mathbb{R} - \left\{\frac{-5}{2}, -2\right\}$$

مثال ۵: هرگاه داشته باشیم: $f(x) = \sqrt{x}$، $g(x) = \sin x$ و $h(x) = x^2$ ضابطه توابع $fogoh$ و $gofoh$ را بنویسید.

حل:

$$1)\ fog(x) = f[g(x)] = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\sin x}$$

$$fogoh(x) = fog[h(x)] = \sqrt{\sin(h(x))} = \sqrt{\sin(x^2)}$$

$$2)\ foh(x) = f[h(x)] = \sqrt{h(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$gofoh(x) = g[foh(x)] = g(|x|) = \sin|x|$$

مثال ۶: با فرض $fog(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = 3 - 2x$، ضابطه تابع f را بیابید.

حل: با فرض $t = g(x) = 3 - 2x$ داریم: $x = \frac{3-t}{2}$، لذا می‌توان نوشت:

$$f[g(x)] = x^2 + 2x \to f(t) = \left(\frac{3-t}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3-t}{2}\right)$$
$$\to f(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 10t + 21)$$

اگر مایل باشیم که متغیر مستقل تابع f را با x نمایش دهیم، می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 10x + 21)$$

مثال ۷: با فرض $f\left(\frac{x}{x-2}\right) = 3x + 4$، ضابطه $f(x)$ را بیابید.

حل: روش یافتن ضابطه $f(x)$ مشابه مثال قبل است. فرض کنید: $t = \frac{x}{x-2}$، داریم:

$$t = \frac{x}{x-2} \to xt - 2t = x \to xt - x = 2t \to x(t-1) = 2t \to x = \frac{2t}{t-1}$$
$$\to f(t) = 3\left(\frac{2t}{t-1}\right) + 4 \to f(t) = \frac{10t-4}{t-1} \to f(x) = \frac{10x-4}{x-1}$$

مثال ۸: اگر $f(x) = 2x^3 - 4$ و $fog(x) = x^2 - 5x$، ضابطه تابع g را بیابید.

حل:

$$f(x) = 2x^3 - 4 \to f[g(x)] = 2[g(x)]^3 - 4$$
$$\to x^2 - 5x = 2[g(x)]^3 - 4 \to 2[g(x)]^3 = x^2 - 5x + 4$$
$$\to [g(x)]^3 = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4) \to g(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4)}$$

۱۳- تابع زوج و تابع فرد:

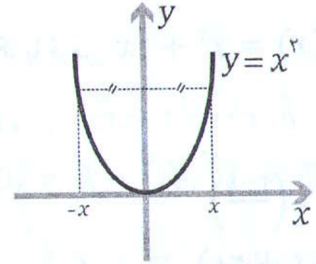
تعریف ۱: مجموعه A را **متقارن** نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم: $-x \in A$

مثال ۱: مجموعه‌های $A = [-۲, ۲]$ و $\mathbb{R}$ متقارن و مجموعه‌های $(-۲, ۳)$ ، $(-۲, ۲]$ و $\mathbb{R} - \{۱\}$ نامتقارن می‌باشند.

تعریف ۲: تابع f را **زوج** گوییم هرگاه:

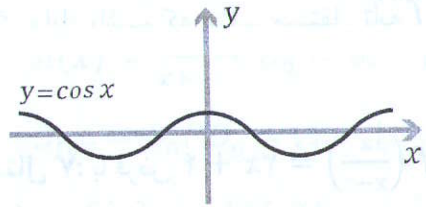
الف) دامنه f متقارن باشد. ب) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(-x) = f(x)$

مثال ۲: تابع $f(x) = x^۲$ زوج است زیرا $D_f = \mathbb{R}$ و داریم:



$$f(-x) = (-x)^۲ = x^۲ = f(x)$$

مثال ۳: تابع $f(x) = cos\,x$ زوج است زیرا $D_f = \mathbb{R}$ و داریم:

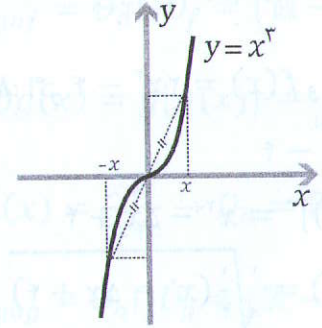


$$f(-x) = cos(-x) = cos\,x = f(x)$$

تعریف ۳: تابع f را **فرد** گوییم هرگاه:

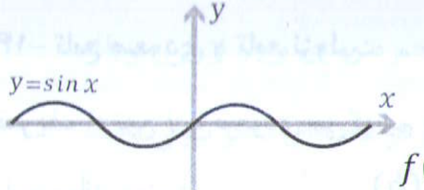
الف) دامنه f متقارن باشد. ب) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(-x) = -f(x)$

مثال ۴: تابع $f(x) = x^۳$ فرد است زیرا $D_f = \mathbb{R}$ و داریم:



$$f(-x) = (-x)^۳ = -x^۳ = -f(x)$$

مثال ۵: تابع $f(x) = sin\,x$ فرد است زیرا $D_f = \mathbb{R}$ و داریم:



$$f(-x) = sin(-x) = -\,sin\,x = -f(x)$$

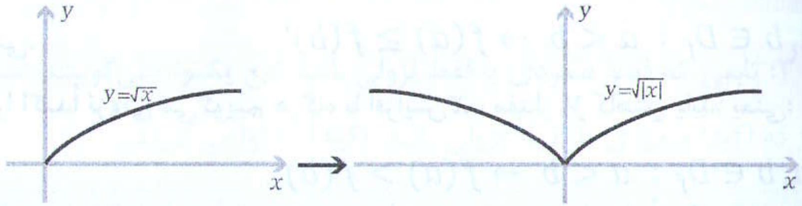
نکته: نمودار تابع زوج نسبت به محور yها و نمودار تابع فرد نسبت به مبدا مختصات قرینه است. از این ویژگی در رسم بعضی از توابع استفاده می‌کنیم. مثال بعد را برای توضیح این مطلب آورده‌ایم[1].

مثال ۶: نمودار تابع $f(x) = \sqrt{|x|}$ را رسم کنید.

حل: دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ است، زیرا همواره داریم: $|x| \geq ۰$

و هم‌چنین داریم: $f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f(x)$

بنابراین f یک تابع زوج است و برای رسم نمودار آن کافی است نمودار را برای $x \geq ۰$ رسم کرده، سپس این قسمت را نسبت به محور yها قرینه کنیم. این دو قسمت در کنار یکدیگر، نمودار تابع f را تشکیل می‌دهند.



تذکر: ممکن است تابعی نه زوج و نه فرد باشد، به عبارت دیگر نمودار آن نه نسبت به محور yها و نه نسبت به مبدا مختصات قرینه باشد.

مثال ۷: تابع $f(x) = \frac{x}{x-۱}$ نه زوج و نه فرد است، زیرا: $D_f = \mathbb{R} - \{۱\}$ و لذا شرط اول تعریف توابع زوج و فرد، یعنی متقارن بودن دامنه را ندارد.

۱- از توابع زوج و فرد در محاسبه بعضی از انتگرال‌های معین در فصل ششم همین کتاب و محاسبه جمله‌های سری فوریه بعضی از توابع متناوب در فصل دهم کتاب ریاضیات عمومی دو نیز استفاده می‌شود.

۱۴- تابع صعودی و تابع نزولی:

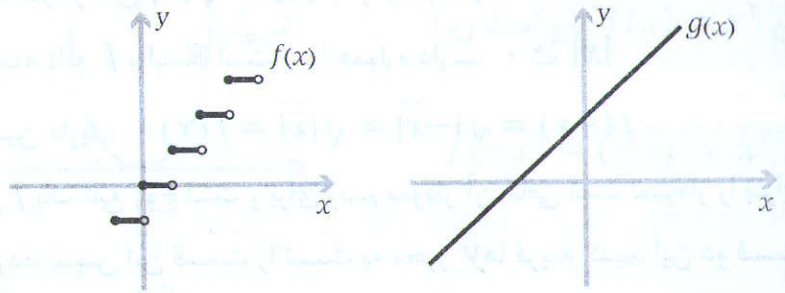
تعریف ۱: تابع f را **صعودی** می‌گوییم هرگاه با افزایش x، مقدار y نیز افزایش یابد یا ثابت بماند. یعنی:

$$\forall\, a,b \in D_f :\ a<b \ \rightarrow f(a) \le f(b)$$ [1]

و تابع f را **اکیداً صعودی** می‌گوییم هرگاه با افزایش x، مقدار y نیز افزایش یابد. یعنی:

$$\forall\, a,b \in D_f :\ a<b \ \rightarrow f(a) < f(b)$$

مثال ۱: تابع $f(x)=[x]$ صعودی و تابع $g(x)=۲x+۱$ اکیداً صعودی می‌باشند.



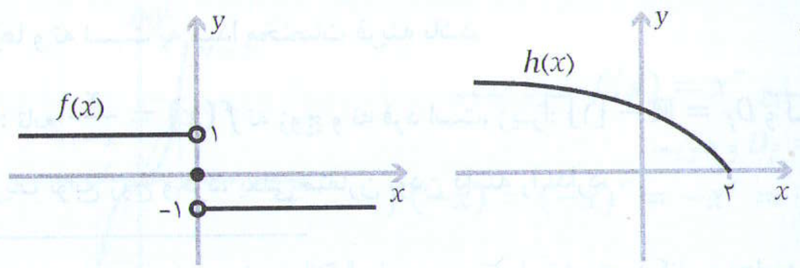
تعریف ۲: تابع f را **نزولی** می‌گوییم هرگاه با افزایش x، مقدار y کاهش یابد یا ثابت بماند. یعنی:

$$\forall\, a,b \in D_f :\ a<b \ \rightarrow f(a) \ge f(b)$$

و تابع f را **اکیداً نزولی** می‌گوییم هرگاه با افزایش x، مقدار y کاهش یابد. یعنی:

$$\forall\, a,b \in D_f :\ a<b \ \rightarrow f(a) > f(b)$$

مثال ۲: تابع $f(x)=-sgn(x)$ نزولی و تابع $h(x)=\sqrt{۲-x}$ اکیداً نزولی می‌باشند.

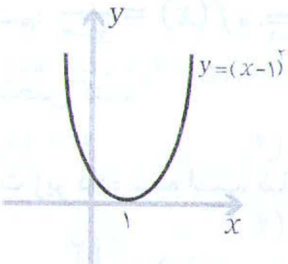


۱- علامت $\forall$ از ابتدای کلمه All به معنای همه گرفته شده است و می‌خوانیم: « به ازای هر ».

مثال ۳: تابع ثابت $f(x)=c$ بر اساس تعریف، هم صعودی و هم نزولی می‌باشد.

تذکر: ممکن است یک تابع در فاصله‌ای صعودی و در فاصله‌ای دیگر نزولی باشد.

مثال ۴: تابع $f(x)=(x-۱)^۲$ در فاصله $(-\infty,۱]$ اکیداً نزولی و در فاصله $[۱,+\infty)$ اکیداً صعودی می‌باشد.



مثال ۵: به کمک تعریف نشان دهید تابع $f(x)=\frac{-۱}{۲x}$ برای $x>۰$ اکیداً صعودی است.

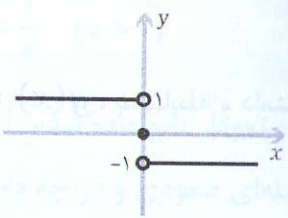
حل: فرض کنید $۰<a<b$، بنابر خاصیت نامساوی‌ها داریم:

$$۰<۲a<۲b \rightarrow ۰<\frac{۱}{۲b}<\frac{۱}{۲a} \rightarrow \frac{-۱}{۲a}<\frac{-۱}{۲b} \rightarrow f(a)<f(b)$$

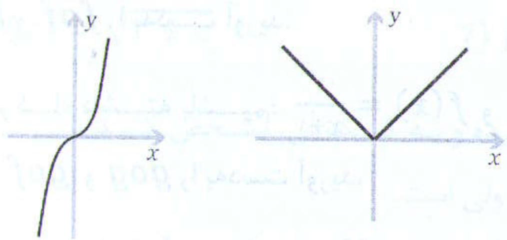
بنابراین تابع f در فاصله $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی می‌باشد.

تعریف ۳: تابعی که فقط صعودی یا فقط نزولی باشد تابع **یکنوا** می‌گویند. هم‌چنین تابعی را که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، **اکیداً یکنوا** می‌گویند.

نکته: تابعی که اکیداً یکنوا باشد هر خط موازی محور xها، آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند (از این نکته به زودی در تشخیص یک‌به‌یک بودن تابع استفاده خواهیم کرد).



یکنوا



غیر یکنوا　　　　اکیداً یکنوا

تمرین

۱- هرگاه داشته باشیم: $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{۱ - x}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f + g$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را مشخص کنید.

۲- هرگاه داشته باشیم: $f(x) = \frac{۱}{x-۲}$ و $g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f - g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را مشخص کنید.

۳- توابع f و g به صورت زیر داده شده است، ضابطه تابع $f + g$ را به‌دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x - ۳ & x \geq ۳ \\ x & x < ۳ \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} ۲ & x \geq ۱ \\ ۲x & x < ۱ \end{cases}$$

۴- توابع f و g به صورت زیر داده شده است، ضابطه تابع $f.g$ را به‌دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x-۱} & x > ۱ \\ x & x \leq ۱ \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x > ۲ \\ x - ۱ & x \leq ۲ \end{cases}$$

۵- هرگاه داشته باشیم: $f(x) = ۱ - x$ و $g(x) = x^۲ + bx + c$ ، مقادیر b و c را طوری پیدا کنید که: $fog(x) = -x^۲ + ۵x + ۴$

۶- هرگاه داشته باشیم: $f(x) = ۲x + ۱$ و $g(x) = ۳x - ۲$ ، حاصل $fog(x) - gof(x)$ را به‌دست آورید.

۷- هرگاه داشته باشیم: $f(x) = ۴ - x^۲$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، ضابطه و دامنه توابع fog و fof را به‌دست آورید.

۸- هرگاه داشته باشیم: $f(x) = \frac{۱}{x+۱}$ و $g(x) = \frac{x}{x-۲}$ ، ضابطه و دامنه توابع gof و gog را به‌دست آورید.

۹- با فرض $f(۲ - x) = x^۲ + ۲x$ ، ضابطه $f(x)$ را معرفی کنید.

۱۰- هرگاه داشته باشیم: $fog(x) = \frac{۱}{x}$ و $g(x) = \frac{x-۱}{x}$ ، ضابطه تابع f را مشخص کنید.

۱۱- با فرض $f(x) = ۲x + ۱$ و $fog(x) = x^۲ + ۲x + ۳$ ، ضابطه تابع g را به‌دست آورید.

۱۲- با توجه به تعریف تابع زوج و تابع فرد، زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x) = x^۲ + |x| - ۲$ ۲) $f(x) = x^۳ + x$

۳) $f(x) = \frac{x^۲+۱}{x}$ ۴) $f(x) = |x| \cos x$

۵) $f(x) = x^۳ \sqrt{x}$ ۶) $f(x) = |x| - x$

۱۳- اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد، با ذکر دلیل زوج یا فرد بودن توابع زیر را با فرض اینکه دامنه آنها متقارن باشد، مشخص کنید.

۱) $f.g$ ۲) $\frac{f}{g}$ ۳) fof ۴) gog ۵) gof ۶) fog

۱۴- به کمک خاصیت زوج یا فرد بودن تابع، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = x^۲ - |x|$ ۲) $g(x) = x|x|$

۱۵- با توجه به تعریف تابع صعودی و نزولی، صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x) = ۳ - ۲x$ ۲) $f(x) = x^۳ + ۲$

۳) $f(x) = \sqrt{۲ + x}$ ۴) $f(x) = \frac{۱}{x} \quad (x > ۰)$

۱۶- نمودار تابع داده شده را رسم کرده و به کمک آن، مشخص کنید تابع در چه فاصله‌ای صعودی و در چه فاصله‌ای نزولی است.

۱) $f(x) = ۴x^۲ - ۴x + ۱$ ۲) $f(x) = ۴x - ۴x^۲$

۱۵- تابع یک به یک:

تعریف ۱: تابع f را **یک‌به‌یک** گوییم هرگاه:

برای هر $a,b \in D_f$ ، اگر $a \neq b$ آنگاه $f(a) \neq f(b)$

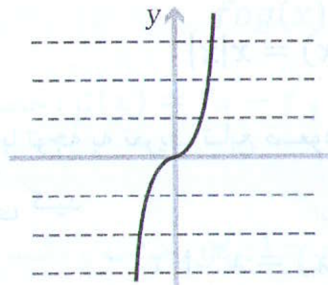
نکته: به کمک مطالبی در مبانی ریاضیات، تعریف تابع یک‌به‌یک را به صورت دیگر نیز می‌توان بیان کرد: « تابع f را یک‌به‌یک گوییم هرگاه برای هر $a,b \in D_f$ ، اگر $f(a) = f(b)$ آنگاه $a = b$ »

مثال ۱: تابع $f = \{(۱,۱),(۲,۴),(۳,۴)\}$ یک‌به‌یک نمی‌باشد زیرا: $f(۲) = f(۳) = ۴$ در حالی‌که $۲ \neq ۳$

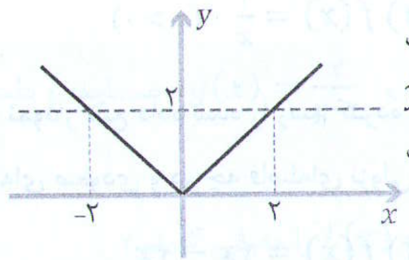
مثال ۲: تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۱$ یک‌به‌یک است زیرا:

$$f(a) = f(b) \to ۲a^۳ + ۱ = ۲b^۳ + ۱ \to a^۳ = b^۳ \to a = b$$

نکته: اگر نمودار تابع f را در اختیار داشته باشیم و هر خط موازی محور xها، منحنی را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن تابع یک‌به‌یک است. بنابراین توابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک می باشند.



مثال ۳: تابع $f(x) = x^۳$ یک‌به‌یک است زیرا هر خط موازی محور xها، منحنی را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.



مثال ۴: تابع $g(x) = |x|$ یک‌به‌یک نمی باشد زیرا به عنوان نمونه خط $y = ۲$ منحنی را در دو نقطه قطع می‌کند. به عبارت دیگر داریم: $g(۲) = g(-۲) = ۲$

۱۶- تابع معکوس:

تعریف ۱: هرگاه در زوج‌های مرتب تابع f جای مؤلفه اول و مؤلفه دوم را عوض کنیم رابطه جدیدی حاصل می‌شود که آن را معکوس رابطه قبلی می‌نامند و با $f^{-۱}$ نمایش می‌دهند. لازم به تذکر است که معکوس هر تابع ممکن است تابع نباشد. اگر $f^{-۱}$ تابع باشد آن را **تابع معکوس** f می نامند.

مثال ۱: معکوس تابع $f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}$ ، مجموعه $f^{-۱} = \{(۲,۱),(۳,۲),(۲,۳)\}$ می‌باشد. این رابطه جدید تابع نمی‌باشد زیرا به عدد ۲ ، دو عدد ۱ و ۳ نسبت داده می شود.

نکته: از مثال قبل می‌توان فهمید که اگر تابع f شرط یک‌به‌یک بودن را دارا باشد، معکوس آن یعنی $f^{-۱}$ نیز، تابع خواهد بود.

خواص تابع معکوس: هرگاه تابع $f^{-۱}$ معکوس تابع f باشد، داریم:

۱) $D_{f^{-۱}} = R_f \quad , \quad R_{f^{-۱}} = D_f$

۲) $\forall x \in D_f : f^{-۱}of(x) = x \quad , \quad \forall x \in D_{f^{-۱}} : fof^{-۱}(x) = x$

۳) نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌باشند (زیرا دو نقطه (a,b) و (b,a) نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند).

ضابطه تابع معکوس: برای یافتن ضابطه تابع معکوس به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱) در تابع $y = f(x)$ ابتدا x را برحسب y محاسبه می‌کنیم.

۲) در رابطه جدید به جای x ، y و به جای y ، x می‌نویسیم[1].

۳) برای y جدید، نام $f^{-۱}(x)$ را انتخاب می‌کنیم.

۱- در یافتن ضابطه تابع معکوس، بعضی از مدرسان ریاضی ترجیح می‌دهند ابتدا در تابع $y = f(x)$ جای x و y را تغییر دهند، سپس y را برحسب x محاسبه کنند؛ در هر حالت نتیجه یکسان است.

مثال ۲: در مثال ۲ بحث تابع یک‌به‌یک (دو صفحه قبل) ثابت شد تابع $f(x) = 2x^3 + 1$ یک‌به‌یک است، بنابراین f معکوس‌پذیر است. معکوس تابع f را به‌دست آورید.

حل: ۱) $y = 2x^3 + 1 \rightarrow x^3 = \frac{y-1}{2} \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}}$

۲) $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$ ۳) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$

مثال ۳: ابتدا ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ یک‌به‌یک است، سپس ضابطه f^{-1} را بیابید.

حل: الف) اثبات یک‌به‌یک بودن: فرض کنید $a, b \in D_f$ و $f(a) = f(b)$، داریم:

$$f(a) = f(b) \rightarrow \frac{a-2}{a+1} = \frac{b-2}{b+1} \rightarrow ab - 2b + a - 2 = ab - 2a + b - 2$$
$$\rightarrow -2b + a = -2a + b \rightarrow 3a = 3b \rightarrow a = b$$

ب) یافتن ضابطه تابع معکوس:

۱) $y = \frac{x-2}{x+1} \rightarrow yx + y = x - 2 \rightarrow yx - x = -y - 2$
$\rightarrow x(y-1) = -y - 2 \rightarrow x = \frac{-y-2}{y-1} \rightarrow x = \frac{2+y}{1-y}$

۲) $y = \frac{2+x}{1-x}$ ۳) $f^{-1}(x) = \frac{2+x}{1-x}$

مثال ۴: تابع $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ برای $x \geq \frac{1}{2}$ یک‌به‌یک است.

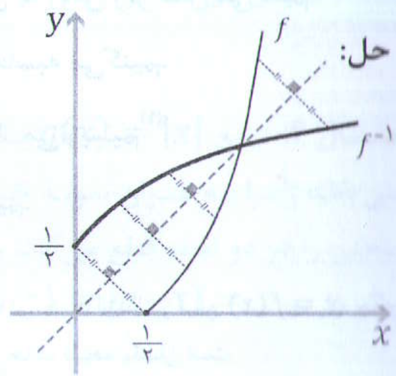
الف) ضابطه معکوس تابع f را بیابید. ب) با توجه به نمودار f، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

حل: ۱) $y = (2x-1)^2 \rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{(2x-1)^2}$

$\rightarrow \sqrt{y} = |2x - 1| \xrightarrow{x \geq \frac{1}{2}} \sqrt{y} = 2x - 1$

$\rightarrow x = \frac{\sqrt{y}+1}{2}$

۲) $y = \frac{\sqrt{x}+1}{2}$ ۳) $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{2}$



تمرین

۱- یک‌به‌یک بودن توابع زیر را (به کمک تعریف، نمودار یا یکنوا بودن) بررسی کنید و برای توابع یک‌به‌یک، ضابطه تابع معکوس را پیدا کنید.

۱) $f(x) = 5x - 3$ ۲) $f(x) = (4 - x)^3$

۳) $f(x) = \sqrt{x}$ ۴) $f(x) = (x-1)^2 \, , \, x \geq 1$

۵) $f(x) = (x-2)^4$ ۶) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

۷) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} \, , \, 0 \leq x \leq 3$ ۸) $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

۲- تابع $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید تابع f یک‌به‌یک است.

ب) ضابطه تابع f^{-1} را به‌دست آورید.

ج) برد تابع f مشخص کنید.

د) به کمک ضابطه توابع f و f^{-1} درستی رابطه $fof^{-1}(x) = x$ را بررسی کنید.

۳- هرگاه $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = 3 - 2x$ نشان دهید:

$$(fog)^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x)$$

۱۷- تابع نمایی:

در کتاب ریاضیات مقدماتی مشاهده کردید که هرگاه a یک عدد حقیقی مثبت و غیر یک، و x یک عدد گویا باشد، منظور از عدد a^x چیست. برای یادآوری عبارات زیر را مرور کنید:

$$۲^۳ = ۲ \times ۲ \times ۲ \quad , \quad ۲^{-۲} = \frac{۱}{۲^۲} \quad , \quad ۲^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{۲^۲} \quad , \quad ۲^{\frac{-۱}{۳}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$$

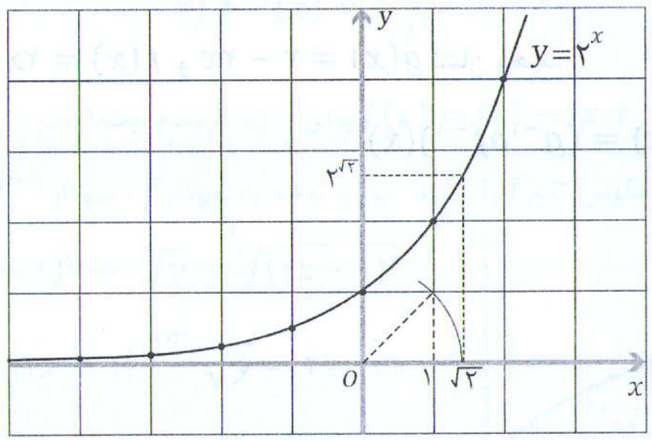
اکنون اعلام می‌کنیم که x می‌تواند یک عدد گنگ هم باشد؛ به عبارت دیگر a^x برای هر عدد حقیقی x قابل تعریف است. به کمک نمودار $y = a^x$، می‌توانیم تصور بهتری از مقدار a^x داشته باشیم.

تعریف ۱: هرگاه a یک عدد حقیقی مثبت و غیر یک باشد، تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ را **تابع نمایی** می نامند[1].

مثال ۱: ابتدا نمودار تابع $f(x) = ۲^x$ را به روش نقطه‌یابی رسم کنید، سپس مقدار $۲^{\sqrt{۲}}$ را بر روی محور y ها مشخص کنید.

حل: برای رسم به روش نقطه‌یابی، جدول زیر را تنظیم و سپس نمودار را رسم کرده‌ایم.

x	...	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۲	۳	...
$f(x)$	...	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴	۸	...

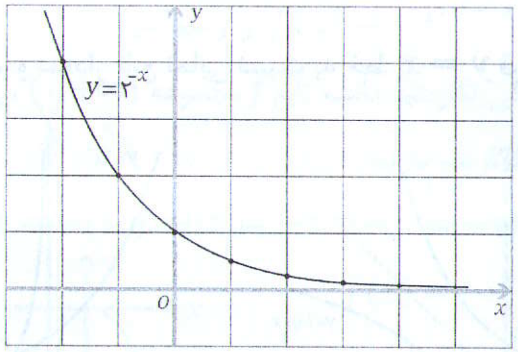


۱- در ریاضیات پیشرفته، ابتدا به کمک انتگرال تابع لگاریتم را تعریف می‌کنند؛ سپس تابع نمایی، به عنوان معکوس تابع لگاریتم معرفی می‌شود. توضیح مختصری برای این مطلب در فصل ششم ، در زیر عنوان «آشنایی بیشتر با اولین قضیه اساسی حساب» آمده است.

مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید.

حل: تابع $f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$ را می‌توان به صورت $f(x) = ۲^{-x}$ در نظر گرفت. مشابه مثال قبل جدول زیر را تنظیم و سپس نمودار را رسم کرده‌ایم.

x	...	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۲	۳	...
$f(x)$	...	۸	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	...



چند نکته در مورد تابع نمایی:

۱- در دو مثال فوق مشاهده می‌کنید فاصله منحنی f و خط $y = ۰$ از یک سمت، مرتب کاهش پیدا می‌کند ولی آن را قطع نمی‌کند؛ در این حالت خط $y = ۰$ را مجانب افقی[1] تابع f می‌گویند.

۲- دامنه تابع $f(x) = a^x$ برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد و برد آن با توجه به دو مثال فوق، فاصله $(۰, +\infty)$ است.

۳- در تابع $f(x) = a^x$، اگر $a > ۱$ تابع اکیداً صعودی و اگر $۰ < a < ۱$ تابع اکیداً نزولی می باشد.

۴- تابع $f(x) = a^x$ یک‌به‌یک است، لذا دارای تابع معکوس می باشد.

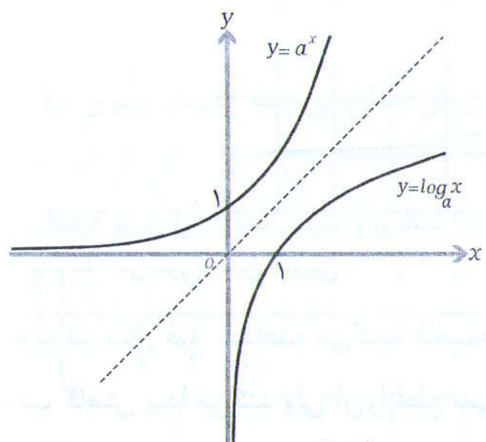
۱- همان‌طور که هنگام رسم توابع اساسی مثلثات متذکر شدیم، تعریف دقیق‌تر مجانب افقی و قائم یک تابع، در فصل دوم (فصل حد و پیوستگی) مطرح می‌شود.

۱۸- تابع لگاریتم:

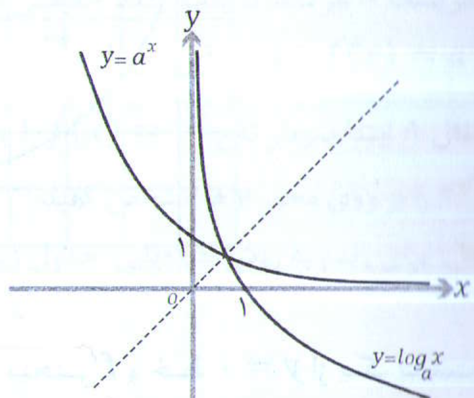
تابع $f(x) = a^x$ یک‌به‌یک است؛ بنابراین دارای تابع معکوس می‌باشد. معکوس این تابع را، **تابع لگاریتم** نامیده و با نماد $f^{-1}(x) = Log_a x$ نمایش می‌دهیم. با توجه به خواص تابع معکوس داریم:

۱- $D_{f^{-1}} = R_f = (\cdot, +\infty)$ ، بنابراین تابع لگاریتم فقط برای اعداد حقیقی مثبت قابل تعریف است.

۲- نمودار تابع لگاریتم و نمودار تابع نمایی نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند، لذا داریم:



$(۱<a)$



$(\cdot<a<۱)$

هم‌چنین با مشاهده دو شکل فوق داریم:

۳- فاصله نمودار تابع لگاریتم و خط $x = \cdot$ از یک سمت مرتب کاهش می‌یابد ولی این دو هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند؛ در این حالت خط $x = \cdot$ را مجانب قائم تابع می‌گویند.

۴- در تابع $y = Log_a x$ ، هرگاه $a > ۱$ تابع اکیداً صعودی و اگر $\cdot < a < ۱$ تابع اکیداً نزولی می‌باشد (از این مطلب برای حل نامعادلات لگاریتمی استفاده می‌شود).

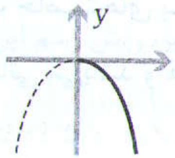
نکته: هرگاه در تابع لگاریتم به جای عدد a ، عدد گنگ e را قرار دهیم، تابع $y = e^x$ را **تابع نمایی طبیعی** می‌نامند. هم‌چنین تابع $y = Log_e x$ را با $y = ln\, x$ نمایش داده و آن را **تابع لگاریتم طبیعی** می‌گویند. علت به کاربردن پسوند طبیعی برای این توابع این است که در بسیاری از مدل‌های ریاضی پدیده‌های طبیعی مانند رشد جمعیت و محاسبه شدت زلزله، این توابع حضور دارند. خواصی که در مورد اعداد توان‌دار و لگاریتم در کتاب ریاضیات مقدماتی ذکر شد، در مورد توابع نمایی و لگاریتمی نیز برقرار است.

مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = -۹^{Log_۳ x}$ را رسم کنید.

حل: با توجه به ویژگی لگاریتم، دامنه تابع f مجموعه $(\cdot, +\infty)$ می‌باشد. با استفاده از خاصیت‌های توان و لگاریتم داریم:

$$f(x) = -۹^{Log_۳ x} = -(۳^۲)^{Log_۳ x} = -۳^{۲Log_۳ x} = -۳^{Log_۳ x^۲} = -x^۲$$

نمودار تابع $f(x) = -x^۲$ برای $x > \cdot$ به صورت مقابل است:



مثال ۲: با فرض اینکه تابع $f(x) = ۱ + ۲^{-x}$ یک‌به‌یک است، ضابطه معکوس این تابع را به‌دست آورید.

حل: با توجه به روش یافتن تابع معکوس، داریم:

$$۱)\ y = ۱ + ۲^{-x} \rightarrow ۲^{-x} = y - ۱ \rightarrow Log_۲(۲^{-x}) = Log_۲(y - ۱)$$

$$\rightarrow -x\, Log_۲ ۲ = Log_۲(y - ۱) \xrightarrow{Log_۲ ۲ = ۱} x = -Log_۲(y - ۱)$$

$$۲)\ y = -Log_۲(x - ۱) \qquad ۳)\ f^{-۱}(x) = -Log_۲(x - ۱)$$

مثال ۳: دامنه تابع $f(x) = Log_۲(\frac{۳-x}{x+۱})$ را مشخص کنید.

حل: با توجه به اینکه تابع لگاریتم فقط برای اعداد حقیقی مثبت قابل تعریف است، دامنه این تابع، مجموعه جواب نامعادله $\frac{۳-x}{x+۱} > \cdot$ می‌باشد. پس از حل این نامعادله به کمک جدول تعیین علامت داریم: $D_f = (-۱, ۳)$

۱۹- توابع هیپربولیک (هذلولی):

تعریف ۱: به کمک دو تابع نمایی $y = e^{x}$ و $y = e^{-x}$ توابع زیر را که به **توابع هیپربولیک**، توابع هذلولی یا توابع هذلولوی معروف می‌باشند، تعریف می‌کنیم.

۱) $\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{۲}$ تابع سینوس هیپربولیک

۲) $\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{۲}$ تابع کسینوس هیپربولیک

۳) $\tanh x = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ تابع تانژانت هیپربولیک

۴) $\coth x = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$ تابع کتانژانت هیپربولیک

نکته: توابع هیپربولیک خاصیت‌های بسیار جالبی دارند. بسیاری از این خاصیت‌ها مشابه خاصیت‌های توابع مثلثاتی می‌باشد و همین موضوع باعث شده، در نام گذاری آنها از نام نسبت‌های مثلثاتی استفاده شود. هم‌چنین تشابه رابطه $\cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = ۱$ به معادله هذلولی $x^{۲} - y^{۲} = ۱$ می‌تواند یکی از دلایلی باشد که این توابع، به توابع هیپربولیک یا توابع هذلولی معروف شده‌اند.

مثال ۱: به کمک تعریف توابع هیپربولیک نشان دهید: $۱ - \tanh^{۲} x = \frac{۱}{\cosh^{۲} x}$

حل:

$$۱ - \tanh^{۲} x = ۱ - \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right)^{۲} = ۱ - \frac{(e^{x}-e^{-x})^{۲}}{(e^{x}+e^{-x})^{۲}}$$

$$= \frac{(e^{x}+e^{-x})^{۲}-(e^{x}-e^{-x})^{۲}}{(e^{x}+e^{-x})^{۲}} = \frac{(e^{۲x}+e^{-۲x}+۲)-(e^{۲x}+e^{-۲x}-۲)}{(e^{x}+e^{-x})^{۲}}$$

$$= \frac{۴}{(e^{x}+e^{-x})^{۲}} = \frac{۱}{\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{۲}\right)^{۲}} = \frac{۱}{\cosh^{۲} x}$$

تذکر: رابطه مثال فوق مشابه رابطه $۱ + \tan^{۲} x = \frac{۱}{\cos^{۲} x}$ در مثلثات می‌باشد.

مثال ۲: به کمک تعریف توابع هیپربولیک نشان دهید:

$$\cosh ۲x = \cosh^{۲} x + \sinh^{۲} x$$

حل:

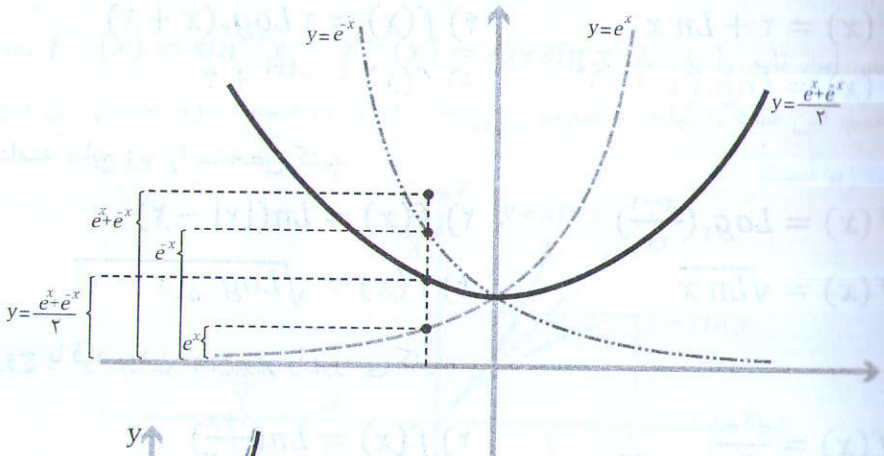
$$\cosh^{۲} x + \sinh^{۲} x = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{۲}\right)^{۲}$$

$$= \frac{(e^{x}+e^{-x})^{۲}+(e^{x}-e^{-x})^{۲}}{۴} = \frac{(e^{۲x}+e^{-۲x}+۲)+(e^{۲x}+e^{-۲x}-۲)}{۴}$$

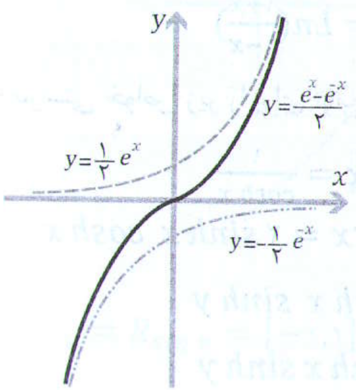
$$= \frac{۲e^{۲x}+۲e^{-۲x}}{۴} = \frac{e^{۲x}+e^{-۲x}}{۲} = \cosh ۲x$$

تذکر: رابطه مثال فوق مشابه رابطه $\cos ۲x = \cos^{۲}x - \sin^{۲}x$ در مثلثات می‌باشد.

مثال ۳: به کمک نمودار دو تابع $y = e^{x}$ و $y = e^{-x}$ می‌توان نمودار تابع $y = \cosh x$ را رسم کرد. با کمی دقت در شکل زیر، روش رسم این تابع مشخص می‌شود.



مثال ۴: برای رسم تابع $y = \sinh x$ روش دیگری متفاوت با روش مثال قبل انتخاب کرده‌ایم. ابتدا نمودارهای دو تابع $y = \frac{۱}{۲}e^{x}$ و $y = -\frac{۱}{۲}e^{-x}$ را رسم می‌کنیم. سپس با جمع نمودار این دو تابع، نمودار $y = \sinh x$ پدید می‌آید.



تمرین

۱- نمودار توابع زیر را رسم کنید (برای اینکه رسم توابع ساده‌تر انجام شود مبنای تابع لگاریتم و پایه تابع نمایی عدد ۲ انتخاب شده است).

۱) $f(x) = -۲^{x+۱}$ ۲) $f(x) = Log_۲(x+۱)$

۳) $f(x) = |Log_۲ x|$ ۴) $f(x) = |۲^x - ۱|$

۵) $f(x) = sgn(۲^x)$ ۶) $f(x) = sgn(Log_۲ x)$

۷) $f(x) = log_۲|x|$ ۸) $f(x) = [۲^x]\ ,\ (x \le ۱)$

۹) $f(x) = ۲^{Log_۲ x}$ ۱۰) $f(x) = ۴^{Log_۲ x}$

۲- یک‌به‌یک بودن توابع زیر را بررسی کرده و برای توابع یک به یک، ضابطه تابع معکوس را معرفی کنید.

۱) $f(x) = ۲^{۳x+۱}$ ۲) $f(x) = e^{-x} - ۱$

۳) $f(x) = ۲ + Ln\, x$ ۴) $f(x) = ۲\, Log_۲(x+۲)$

۵) $f(x) = Log_۲(x+۲)^۴$ ۶) $f(x) = ۲^{|x|} + ۳$

۳- دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x) = Log_۲(\frac{x-۱}{۲x})$ ۲) $f(x) = Ln(|x| - ۲)$

۳) $f(x) = \sqrt{Ln\, x}$ ۴) $f(x) = \sqrt{Log_{./۵}(x-۱)}$

۴- زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x) = \frac{e^x+۱}{e^x-۱}$ ۲) $f(x) = Ln(\frac{۱+x}{۱-x})$

۵- درستی خواص زیر را برای توابع هیپربولیک بررسی کنید.

۱) $cosh(-x) = cosh(x)$ ۲) $tanh\, x = \frac{۱}{coth\, x}$

۳) $cosh^۲ x - sinh^۲ x = ۱$ ۴) $sinh\, ۲x = ۲\, sinh\, x\, cosh\, x$

۵) $sinh(x+y) = sinh\, x\, cosh\, y + cosh\, x\, sinh\, y$

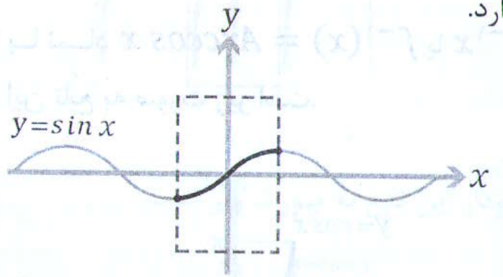
۶) $cosh(x-y) = cosh\, x\, cosh\, y - sinh\, x\, sinh\, y$

۲۰- توابع معکوس مثلثاتی:

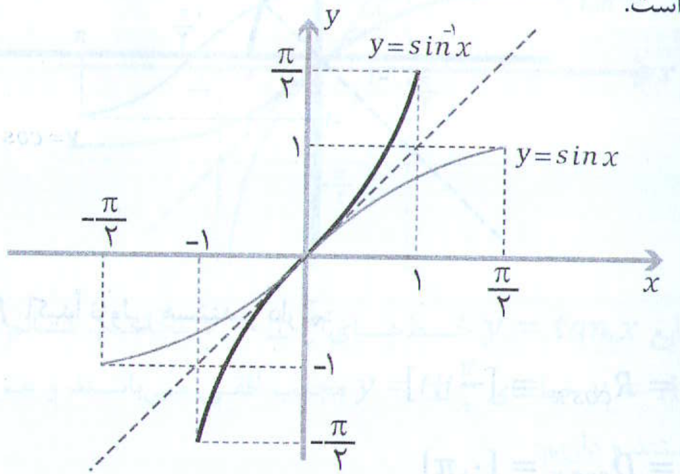
توابع مثلثاتی یک‌به‌یک نمی‌باشند و لذا معکوس ندارند؛ ولی اگر دامنه این توابع را محدود کنیم می‌توان برای این توابع، تابع معکوس تعریف کرد. لازم به یاد آوری است که دو نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند و داریم:

$D_{f^{-۱}} = R_f \ ,\ R_{f^{-۱}} = D_f$

الف) تابع $y = Arcsin\, x$: تابع $f(x) = sin\, x$ در فاصله $[\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ یک‌به‌یک است، لذا معکوس دارد.



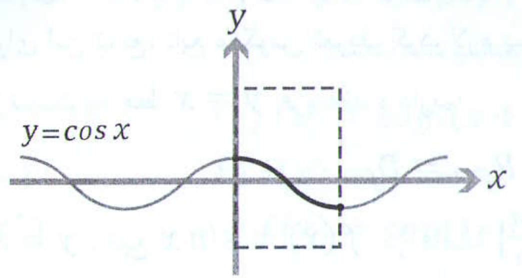
معکوس این تابع را با نماد $f^{-۱}(x) = Arcsin\, x$ یا $f^{-۱}(x) = sin^{-۱}x$ نمایش می‌دهیم. این نماد را نباید با عبارت $(sin\, x)^{-۱} = \frac{۱}{sin\, x}$ اشتباه کرد. نمودار این تابع به صورت زیر است.



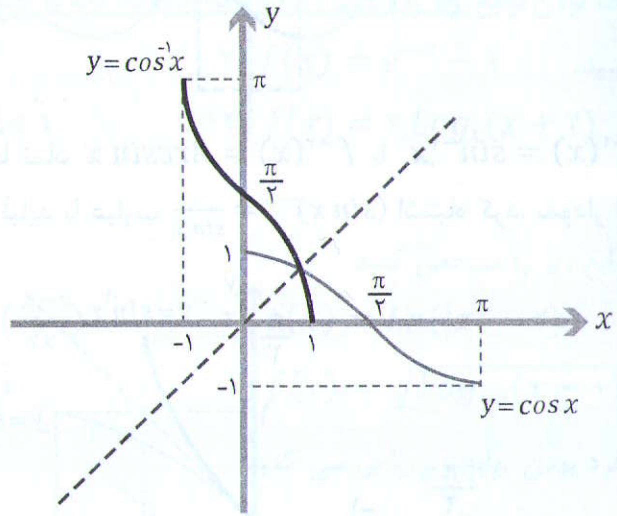
دو تابع f و $f^{-۱}$ اکیداً صعودی هستند و داریم:

$D_{sin^{-۱}x} = R_{sin\, x} = [-۱,۱] \ ,\ R_{sin^{-۱}x} = D_{sin\, x} = [\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$

ب) تابع $y = Arccos\ x$: تابع $f(x) = cos\ x$ درفاصله $[\cdot, \pi]$ یک‌به‌یک است، لذا معکوس دارد.



معکوس این تابع را با نماد $f^{-۱}(x) = Arccos\ x$ یا $f^{-۱}(x) = cos^{-۱}x$ نمایش می‌دهیم. نمودار این تابع به صورت زیر است.

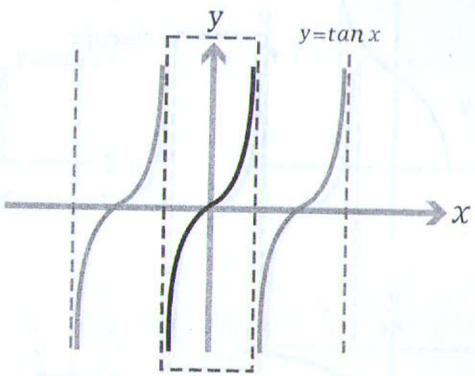


دو تابع f و $f^{-۱}$ اکیداً نزولی هستند و داریم:

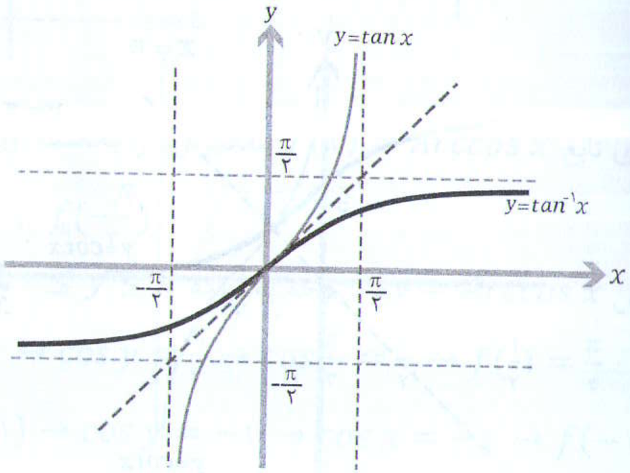
$$D_{cos^{-۱}x} = R_{cos\,x} = [-۱,۱]$$

$$R_{cos^{-۱}x} = D_{cos\,x} = [\cdot, \pi]$$

ج) تابع $y = Arctan\ x$: تابع $f(x) = tan\ x$ در فاصله $\left[\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$ یک‌به‌یک است، لذا معکوس دارد (لازم به تذکر است این تابع در نقاط $x = \pm\frac{\pi}{۲}$ تعریف نمی‌شود).



معکوس این تابع را با نماد $f^{-۱}(x) = Arctan\ x$ یا $f^{-۱}(x) = tan^{-۱}x$ نمایش می‌دهیم. نمودار این تابع به صورت زیر است.

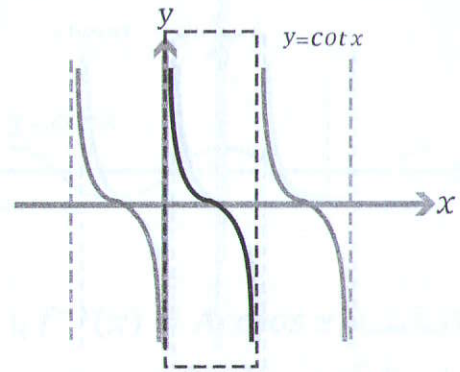


برای تابع $y = tan\ x$ خط‌های $x = \pm\frac{\pi}{۲}$ مجانب قائم و برای تابع $y = Arctan\ x$ خط‌های $y = \pm\frac{\pi}{۲}$ مجانب افقی می‌باشند و هر دو تابع اکیداً صعودی هستند و داریم:

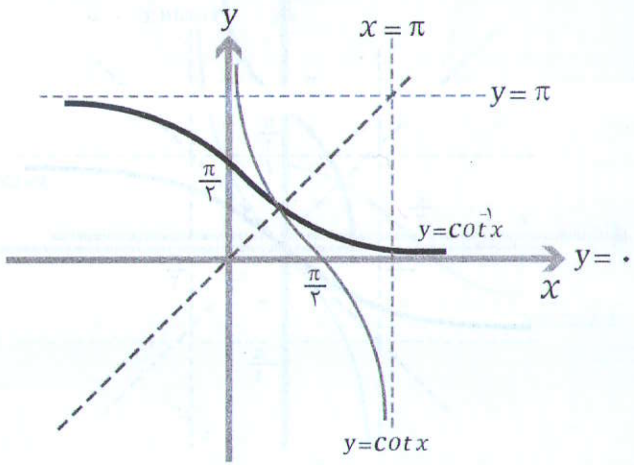
$$D_{tan^{-۱}x} = R_{tan\,x} = \mathbb{R}$$

$$R_{tan^{-۱}x} = D_{tan\,x} = \left(\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$$

د) تابع $y = Arccot\ x$: این تابع در فاصله $[\cdot, \pi]$ یک‌به‌یک است و لذا دارای معکوس است (لازم به تذکر است این تابع در نقاط $x = \cdot , \pi$ تعریف نمی‌شود).



معکوس این تابع را با نماد $f^{-1}(x) = Arccot\ x$ یا $f^{-1}(x) = cot^{-1}x$ نمایش می‌دهیم. نمودار این تابع به صورت زیر است.

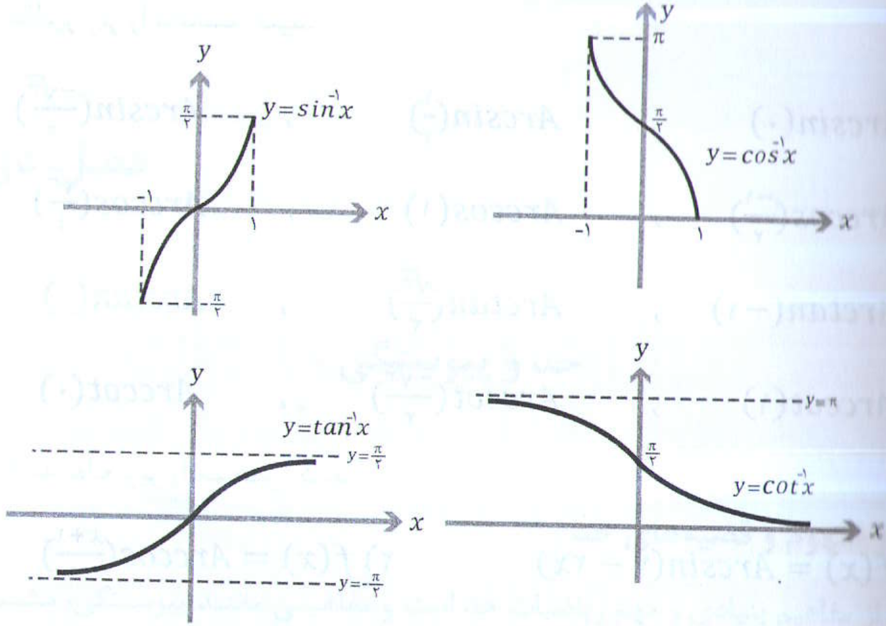


برای تابع $y = cot\ x$ خطهای $x = \cdot$ و $x = \pi$ مجانب قائم و برای تابع $y = Arccot\ x$ خطهای $y = \cdot$ و $y = \pi$ مجانب افقی می‌باشند و هر دو تابع اکیداً نزولی هستند و داریم:

$$D_{cot^{-1}x} = R_{cot\,x} = \mathbb{R}$$

$$R_{cot^{-1}x} = D_{cot\,x} = (\cdot, \pi)$$

نتیجه: نمودار چهار تابع اساسی معکوس مثلثاتی به صورت زیر می‌باشد.



مثال ۱: برای تابع $f(x) = Arccos\ x$ مقادیر زیر را به‌دست آورید.

$$f(\tfrac{۱}{۲})\ ,\ f(-۱)\ ,\ f(\tfrac{-\sqrt{۳}}{۲})$$

حل: با فرض $y = Arccos\ x$ ، با توجه به اینکه $\cdot \leq y \leq \pi$ می‌باشد، داریم:

$$y = Arccos(\tfrac{۱}{۲}) \rightarrow cos\,y = \tfrac{۱}{۲} \rightarrow cos\tfrac{\pi}{۳} = \tfrac{۱}{۲} \rightarrow f(\tfrac{۱}{۲}) = \tfrac{\pi}{۳}$$

$$y = Arccos(-۱) \rightarrow cos\,y = -۱ \rightarrow cos\,\pi = -۱ \rightarrow f(-۱) = \pi$$

$$y = Arccos(\tfrac{-\sqrt{۳}}{۲}) \rightarrow cos\,y = (\tfrac{-\sqrt{۳}}{۲}) \rightarrow cos(\pi - \tfrac{\pi}{۶}) = (\tfrac{-\sqrt{۳}}{۲})$$

$$\rightarrow f(\tfrac{-\sqrt{۳}}{۲}) = \tfrac{۵\pi}{۶}$$

مثال ۲: دامنه تابع $f(x) = Arcsin\ (۲x - ۱)$ را به‌دست آورید.

حل: $-۱ \leq ۲x - ۱ \leq ۱ \rightarrow \cdot \leq ۲x \leq ۲ \rightarrow \cdot \leq x \leq ۱ \rightarrow D_f = [\cdot, ۱]$

تمرین

۱- مقادیر زیر را محاسبه کنید.

۱) $Arcsin(۰)$, $Arcsin(\frac{۱}{۲})$, $Arcsin(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})$

۲) $Arccos(\frac{-۱}{۲})$, $Arccos(۱)$, $Arccos(\frac{\sqrt{۳}}{۲})$

۳) $Arctan(-۱)$, $Arctan(\frac{\sqrt{۳}}{۳})$, $Arctan(۰)$

۴) $Arccot(۱)$, $Arccot(\frac{-\sqrt{۳}}{۳})$, $Arccot(۰)$

۲- دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x) = Arcsin(۳ - ۲x)$ ۲) $f(x) = Arccos(\frac{x+۱}{۲})$

۳) $f(x) = Arccos(\frac{۱}{x+۱})$ ۴) $f(x) = ۲Arcsin(\frac{x}{x+۱})$

۵) $f(x) = ۲ + ۳Arccot(۳ - ۲x)$ ۶) $f(x) = Arctan(x + ۲)$

۷) $f(x) = ۳ - Arccos(\sqrt{x})$ ۸) $f(x) = Arctan\sqrt{x - ۲}$

۳- نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

۱) $f(x) = Arcsin(x + ۱)$ ۲) $f(x) = Arccos(x - ۱)$

۳) $f(x) = Arctan(x - ۱)$ ۴) $f(x) = Arccot(x + ۱)$

۵) $f(x) = (Arccos\, x) - \frac{\pi}{۴}$ ۶) $f(x) = \frac{\pi}{۴} + Arcsin\, x$

۴- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = |Arcsin\, x|$ ۲) $f(x) = |Arctan\, x|$

فصل دوم

حد و پیوستگی

۲- ۱ مفهوم و قضیه‌های حد

یکی از مفاهیم بنیادی و مهم ریاضیات حد است و مفاهیمی مانند پیوستگی، مشتق و انتگرال به کمک آن بیان می‌شود. با ذکر چند مثال مفهوم حد را توضیح می‌دهیم.

مثال ۱: تابع $f(x) = \frac{x^۲-۱}{x-۱}$ را در نظر بگیرید. این تابع در نقطه $x = ۱$ تعریف نشده است ولی می‌خواهیم بدانیم هنگامی که مقادیر x از سمت چپ یا راست به $x = ۱$ نزدیک می‌شوند، برای تابع $f(x)$ چه اتفاقی می‌افتد. برای پاسخ به این سؤال، جدول‌های زیر را به کمک ماشین حساب تکمیل کرده‌ایم:

x	۲	۱/۵	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	...	۱
$f(x)$	۳	۲/۵	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱	...	

x	۰	۰/۵	۰/۷۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	...	۱
$f(x)$	۱	۱/۵	۱/۷۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	...	

در اولین جدول مشاهده می‌کنیم هنگامی که مقادیر x از سمت مقادیر بیشتر از یک (سمت راست) به عدد یک نزدیک می‌شوند مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌گردند. در این حالت می‌گوییم «حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۱$ برابر ۲ است» و این مطلب را با نماد $\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = ۲$ نشان می‌دهیم[1].

در جدول دوم مشاهده می‌کنیم هنگامی که مقادیر x از سمت مقادیر کمتر از یک (سمت چپ) به عدد یک نزدیک می‌شوند مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌گردند. در این حالت می‌گوییم «حد چپ تابع $f(x)$ در $x = ۱$ برابر ۲ است» و این مطلب را با نماد $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) = ۲$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲: برای محاسبه حد چپ و راست تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x = ۰$ جدول‌های زیر را تشکیل داده‌ایم:

x	۴	۱	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۹}$	۰/۰۱	۰/۰۰۰۱	$۱۰^{-۶}$	...	۰
$f(x)$	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	...	

x	۴-	۱-	$-\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۹}$	۰/۰۱-	۰/۰۰۰۱-	$-۱۰^{-۶}$	...	۰
$f(x)$	به ازای کلیه مقادیر کمتر از صفر تابع تعریف نشده است								

در جدول اول مشاهده می‌کنیم هنگامی که مقادیر x از سمت مقادیر بیشتر از صفر (سمت راست) به عدد صفر نزدیک می‌شوند، مقادیر $f(x)$ به عدد صفر نزدیک می‌گردند. لذا حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۰$ برابر صفر است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to ۰^+} \sqrt{x} = ۰$$

در جدول دوم مشاهده می‌کنیم هنگامی که مقادیر x از سمت مقادیر کمتر از صفر (سمت چپ) به عدد صفر نزدیک می‌شوند، تابع تعریف نمی شود. لذا در این حالت می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۰$ حد چپ ندارد و می‌نویسیم:

$\lim\limits_{x \to ۰^-} \sqrt{x}$ موجود نیست

۱- عبارت Lim سه حرف اول واژه $Limit$ به معنی حد می‌باشد.

مثال ۳: برای محاسبه حد چپ و راست تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = ۲$ جدول‌های زیر را تشکیل داده‌ایم:

x	۴	۳	۲/۵	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	...	۲
$f(x)$	۴	۳	۲	۲	۲	۲		

x	۰	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	...	۲
$f(x)$	۰	۱	۱	۱	۱	۱		

با توجه به محاسبات فوق داریم:

حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۲$ برابر ۲ است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x \to ۲^+} [x] = ۲$

حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۲$ برابر یک است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x \to ۲^-} [x] = ۱$

نکته:

۱) در بحث حد چپ یا راست تابع در نقطه $x = a$، به نقطه $x = a$ نزدیک می‌شویم ولی به این مطلب که تابع در این نقطه تعریف شده یا نشده کاری نداریم.

۲) برای اینکه حد چپ و راست تابع در نقطه‌ای را مشخص کنیم هرچه به آن نقطه نزدیک‌تر شویم حدس ما دقیق‌تر خواهد بود.

۳) در لفظ نزدیک شدن یا میل کردن در محاسبه حد، حرکت و تغییر نهفته است. این مطلب برای مقادیر x صادق است ولی هنگامی که لفظ نزدیک شدن یا میل کردن را برای مقادیر y به کار می‌بریم، ممکن است حرکت و تغییری در کار نباشد (مانند مثال ۳).

تعریف ۱: هرگاه حد چپ و حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ موجود و هر دو برابر L باشند، می‌گوییم حد تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر L است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$؛ در غیر این حالت می‌گوییم حد موجود نیست.

مثال ۴: با توجه به مثال‌های ۱ ، ۲ و ۳ و تعریف ۱ داریم:

$$\left(\lim_{x \to ۱^+} \frac{x^۲-۱}{x-۱} = ۲ \quad \text{و} \quad \lim_{x \to ۱^-} \frac{x^۲-۱}{x-۱} = ۲\right) \rightarrow \lim_{x \to ۱} \frac{x^۲-۱}{x-۱} = ۲$$

$(\underset{x\to ۰^+}{Lim}\sqrt{x} = ۰$ و $\underset{x\to ۰^-}{Lim}\sqrt{x}$ موجود نیست$) \rightarrow \underset{x\to ۰}{Lim}\sqrt{x}$ موجود نیست

$(\underset{x\to ۲^+}{Lim}[x] = ۲$ و $\underset{x\to ۲^-}{Lim}[x] = ۱) \rightarrow \underset{x\to ۲}{Lim}[x]$ موجود نیست

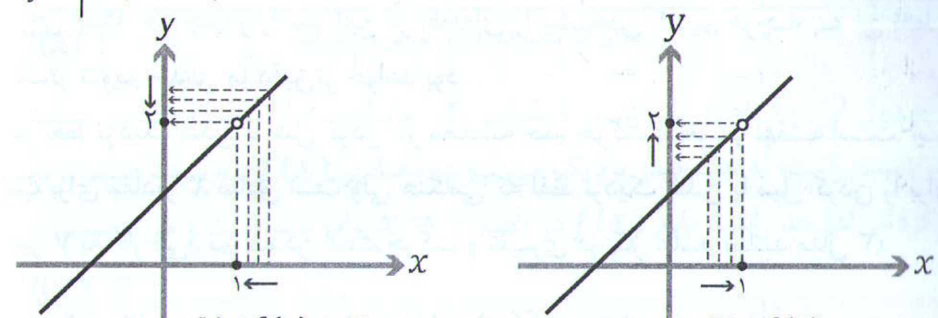
نکته: از روی نمودار تابع نیز می‌توان حد چپ و راست تابع را در نقطه $x = a$ مشخص کرد. برای این منظور به ازای هر نقطه نزدیک $x = a$، بر روی محورxها به کمک نمودارتابع $f(x)$ نقطه‌ای را بر روی محورyها نظیر می‌کنیم. با حرکت نقاط روی محورxها به سمت $x = a$، حرکت نقاط نظیر را بر روی محورyها زیر نظر گرفته و حد تابع را مشخص می‌کنیم. حدهای مثال‌های قبل را یک بار دیگر به کمک نمودار توابع آن‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۵: برای محاسبه حد تابع $f(x) = \frac{x^۲-۱}{x-۱}$ در نقطه $x = ۱$، ابتدا نمودار تابع را رسم کرده و سپس به کمک آن، مقدار حدها را می‌یابیم.

$D_f = \mathbb{R} - \{۱\} \xrightarrow{x\neq ۱} f(x) = \frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = x + ۱$ (خط راست)

x	۱	۲
y	۲	۳

نمودار خط راست را به کمک دو نقطه آن می‌توان رسم کرد.

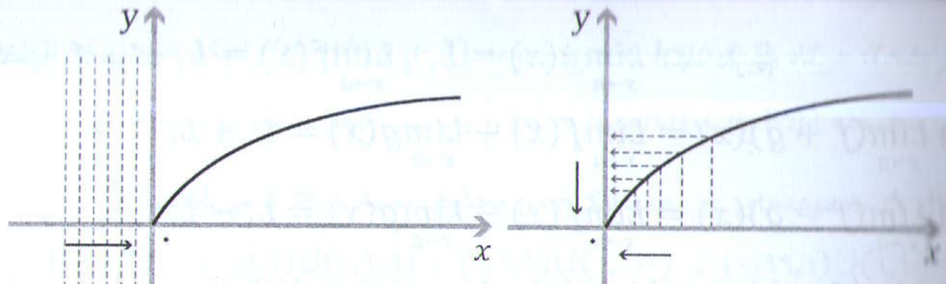


$\underset{x\to ۱^+}{Lim}f(x) = ۲$ $\underset{x\to ۱^-}{Lim}f(x) = ۲$

مثال ۶: برای محاسبه حد چپ و راست تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x = ۰$، ابتدا نمودار تابع را رسم کرده و سپس حدها را مشخص می‌کنیم.

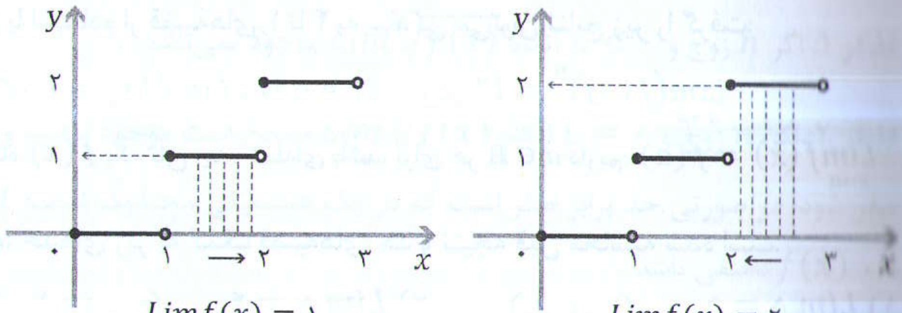
$D_f = [۰, +\infty)$

x	۰	۱	۴	۹	۱۶	...
y	۰	۱	۲	۳	۴	...



$\underset{x\to ۰^+}{Lim}f(x) = ۰$ $\underset{x\to ۰^-}{Lim}f(x)$ موجود نیست

مثال ۷: برای محاسبه حد چپ و راست تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = ۲$، ابتدا نمودار تابع را رسم کرده و سپس به کمک آن، مقدار حدها را می‌یابیم.



$\underset{x\to ۲^+}{Lim}f(x) = ۲$ $\underset{x\to ۲^-}{Lim}f(x) = ۱$

تذکر: در بسیاری از مباحث ریاضی لازم است که حد یک تابع، در یک نقطه محاسبه شود. اگر خواسته باشیم این کار را به وسیله‌ی تشکیل جدول و یا رسم نمودار تابع انجام دهیم، گاه بسیار مشکل و طولانی خواهد بود. لذا ریاضی‌دانان تعدادی قضیه را ثابت کرده‌اند که به کمک آنها محاسبه حد تابع، ساده‌تر انجام می‌شود. در این کتاب تعدادی از این قضیه‌ها را بدون اثبات بیان کرده و مورد استفاده قرار می‌دهیم.

قضیه ۱: هرگاه a و c دو عدد حقیقی باشند برای تابع ثابت $f(x) = c$ داریم:

$$\underset{x\to a}{Lim}f(x) = \underset{x\to a}{Lim}\, c = c$$

قضیه ۲: هرگاه $f(x) = x$ و $a \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\underset{x\to a}{Lim}f(x) = \underset{x\to a}{Lim}\, x = a$$

قضیه ۳: هرگاه $\underset{x\to a}{Lim}f(x) = L$ و k یک عدد حقیقی باشد، داریم:

$$\underset{x\to a}{Lim}\, kf(x) = k\underset{x\to a}{Lim}f(x) = kL$$

قضیه ۴: هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ آنگاه داریم:

۱) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

۲) $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$

۳) $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 L_2$

۴) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0)$

نتیجه: با استفاده از قضیه‌های ۱ تا ۴ به سادگی می‌توان نتایج زیر را گرفت:

الف) هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ و $n \in \mathbb{N}$ آنگاه داریم: $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n = L^n$

ب) هرگاه $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد، برای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

مثال ۸: حدهای زیر به کمک قضیه‌های حد و نتیجه قبل محاسبه شده است.

۱) $\lim\limits_{x\to 3} 5 = 5$ (بنابر قضیه ۱) ۲) $\lim\limits_{x\to 4} x = 4$ (بنابر قضیه ۲)

۳) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2 - 3x + 1) = 2(2)^2 - 3(2) + 1 = 3$ (بنابر نتیجه)

۴) $\lim\limits_{x\to 2^-} 5[x] = 5\lim\limits_{x\to 2^-}[x] = 5 \times 1 = 5$ (بنابر قضیه ۳ و مثال ۳)

۵) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - 1 + \frac{x^2-1}{x-1}) = \lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - 1) + \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 1 + 2 = 3$

(بنابر نتیجه و مثال ۱ و قضیه ۴)

۶) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x} - x^2) = \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x} - \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 - 0 = 0$

(بنابر نتیجه و مثال ۲ و قضیه ۴)

۷) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-1}{5x^2+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(5x^2+1)} = \frac{-1}{1} = -1$ (بنابر نتیجه و قضیه ۴)

۸) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x-1}{5x^2+1}\right)^7 = \left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x-1}{5x^2+1}\right)\right)^7 = (-1)^7 = -1$ (بنابر نتیجه و قضیه ۴)

۹) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x-3}{x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 4}(2x-3)}{\lim\limits_{x\to 4}(x-4)} = \frac{5}{0}$ (بنابر قضیه ۴، حد در $\mathbb{R}$ موجود نیست)

تعریف ۲: هرگاه $a \in \mathbb{R}$ و $h > 0$، مجموعه $(a-h, a+h)$ را یک همسایگی نقطه a و مجموعه $(a-h, a)\cup(a, a+h)$ را یک همسایگی محذوف نقطه a می‌نامند.

مثال ۹: مجموعه‌های زیر، همسایگی‌های محذوف نقطه $x = 1$ می‌باشند.

$(0,1)\cup(1,2)$, $(0/5,1)\cup(1,1/5)$, $(0/9,1)\cup(1,1/1)$, $(0/99,1)\cup(1,1/01)$

قضیه ۵: هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ و n یک عدد طبیعی غیر یک باشد، اگر n فرد یا n زوج و $L > 0$ باشد، داریم: $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

تذکر ۱: اگر n زوج و $L < 0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}$ موجود نمی‌باشد.

تذکر ۲: اگر n زوج و $L = 0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}$ ممکن است موجود نباشد و یا برابر صفر شود. در صورتی حد برابر صفر است که در یک همسایگی محذوف نقطه $x = a$ تابع $f(x)$ نامنفی باشد.

مثال ۱۰: حدهای زیر به کمک قضیه‌های حد محاسبه شده است.

۱) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt[3]{x^2 - 8} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to -3}(x^2 - 8)} = \sqrt[3]{1} = 1$

۲) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[5]{2x^2 - 9} = \sqrt[5]{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2 - 9)} = \sqrt[5]{-1} = -1$

۳) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{2x + 1} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 4}(2x + 1)} = \sqrt{9} = 3$

۴) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[4]{x^2 + 3x - 1} = \sqrt[4]{\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + 3x - 1)} = \sqrt[4]{-1}$ حد موجود نیست

۵) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{2x - 4} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2}(2x - 4)} = \sqrt[3]{0} = 0$

۶) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[4]{x + 2} = \sqrt[4]{\lim\limits_{x\to -2}(x + 2)} = \sqrt[4]{0} = ?$

بنا بر تذکر ۲ حد موجود نیست؛ زیرا در هر همسایگی محذوف $x=-2$ تابع $f(x)=x+2$ مثبت نمی‌باشد. به بیان دیگر، تابع زیر رادیکال یعنی f برای $x<-2$ منفی می‌شود.

۷) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+1)}=\sqrt{0}=?$

در هر همسایگی محذوف $x=1$ تابع زیر رادیکال نامنفی است، زیرا:

$$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$$

پس حد موجود و برابر صفر است.

نکته: هرگاه حد تابع در یک نقطه به صورت $\frac{0}{0}$ درآید آن را مبهم نامیده و می‌توان به کمک روش‌هایی، این ابهام را برطرف کرد[1]. پس از رفع ابهام مشخص می‌شود که حد موجود است و یا حد موجود نیست. ضمن بیان چند مثال با بعضی از روش‌های رفع ابهام آشنا می‌شوید.

مثال ۱۱: برای محاسبه $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ اگر حد صورت و حد مخرج را به کمک قضیه‌ها محاسبه کنیم، حد به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید. در مثال ۱ به کمک جدول و در مثال ۵ به کمک نمودار مشاهده کردید که حد این تابع برابر ۲ است. بنابراین روش‌هایی وجود دارد که بتوان این ابهام را برطرف کرد. چون درحد، هنگامی که x به سمت یک میل می‌کند مقادیر x به یک بسیار نزدیک می‌شوند ولی مقدار $x=1$ را اختیار نمی‌کنند، بنابراین عبارت $x-1$ غیر صفر است و در نزدیکی $x=1$ دو تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ و $g(x)=x+1$ مساوی هستند. لذا به صورت زیر می‌توان این حد را محاسبه کرد:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

۱- در فصل سوم به کمک حد با مفهوم جدیدی به نام مشتق آشنا می‌شوید. در محاسبات این مفهوم جدید، به حدهای مبهم $\frac{0}{0}$ بر می‌خوریم که باید رفع ابهام شوند.

مثال ۱۲: مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-1}$ را به‌دست آورید.

حل: با محاسبه جداگانه حد صورت و حد مخرج، جواب حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درمی‌آید. هرگاه صورت و مخرج تابع $f(x)=\frac{x^3+x-2}{x^2-1}$ را به ترتیب $g(x)$ و $h(x)$ بنامیم، چون $g(1)=0$ و $h(1)=0$ پس $x-1$ عاملی برای $g(x)$ و $h(x)$ می‌باشد[1]. عوامل دیگر را به کمک عمل تقسیم یا تجزیه می‌توان به‌دست آورد. عبارت $x-1$ را عامل صفر کننده صورت و مخرج می‌نامند و چون در هنگام حدگیری، این عبارت غیر صفر می‌باشد، می‌توان آن را مانند مثال قبل از صورت و مخرج کسر حذف کرد و نوشت:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x+1}=\frac{4}{2}=2$$

مثال ۱۳: مقدار $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+8}$ را به‌دست آورید.

حل: با محاسبه جداگانه حد صورت و حد مخرج، جواب حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید. بنابراین $x+2$ عامل صفر کننده صورت و مخرج است. پس داریم:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{x^2-2x+4}=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}$$

مثال ۱۴: مقدار $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ پس از محاسبه جداگانه حد صورت و حد مخرج، به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید. برای حذف عامل صفر کننده یعنی $x-4$، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

۱- دلیل این مطلب را در ذیل بحث « باقیمانده تقسیم بدون عمل تقسیم» در کتاب ریاضیات مقدماتی بخش ۲-۱ می‌توانید مشاهده کنید.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

مثال ۱۵: مقدار $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ پس از محاسبه جداگانه حد صورت و حد مخرج، به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید. برای حذف عامل صفر کننده یعنی $x-1$، هم زمان با تجزیه صورت، مخرج کسر را نیز گویا می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{x}-1}\times\frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=2\times 3=6$$

قضیه ۶: برای هر عدد حقیقی a همواره داریم:

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a\quad,\quad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

مثال ۱۶: به کمک قضیه‌های حد، حدهای زیر محاسبه شده است.

۱) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\cos x-3\sin x)=2\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos x-3\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x$$

$$=2\cos\frac{\pi}{6}-3\sin\frac{\pi}{6}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-3\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-\frac{3}{2}$$

۲) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x}{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

مشابه مورد فوق، وجود حدهای زیر را می‌توان مشخص کرد.

۳) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\tan\frac{\pi}{2}$ موجود نیست ۴) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cot x=\cot\frac{\pi}{2}=0$

تذکر: قضیه زیر، روشی دیگر برای رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$ بعضی از حدها را بیان می‌کند.

قضیه ۷: هرگاه x برحسب رادیان باشد[1]، داریم: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

۱- علت اینکه x باید برحسب رادیان باشد این است که در تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ صورت کسر، عددی حقیقی برحسب واحد طول است، لذا مخرج یعنی x هم باید عدد حقیقی برحسب واحد طول باشد؛ و رادیان واحدی برای اندازه‌گیری زاویه برحسب طول است. برای آشنایی با واحد رادیان، بخش یکم از فصل پنجم کتاب ریاضیات مقدماتی را مطالعه کنید.

مثال ۱۷: حدهای زیر در برخورد اول، به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آیند ولی به کمک قضیه ۷ رفع ابهام شده‌اند. روش رفع ابهام را برای مورد اول توضیح داده‌ایم، بقیه موارد به‌طور مشابه انجام می‌شود.

۱) $$\lim_{t\to 2}\frac{\sin(t-2)}{(t-2)}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم})$$

با فرض $x=t-2$، هرگاه t به سمت ۲ میل کند، x به سمت صفر میل می‌کند و بنابر قضیه ۷ می‌توان نوشت:

$$\lim_{t\to 2}\frac{\sin(t-2)}{t-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

۲) $$\lim_{t\to 2}\frac{\sin(t-2)}{t^2-4}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم})$$

$$\lim_{t\to 2}\frac{\sin(t-2)}{t^2-4}=\lim_{t\to 2}\frac{\sin(t-2)}{t-2}\times\frac{1}{t+2}=\lim_{t\to 2}\frac{\sin(t-2)}{t-2}\times\lim_{t\to 2}\frac{1}{t+2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{t\to 2}\frac{1}{t+2}=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\qquad(x=t-2)$$

۳) $$\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{3t}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم})$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{5}{3}\frac{\sin 5t}{5t}=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{5}{3}\times 1=\frac{5}{3}\qquad(x=5t)$$

۴) $$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{2}}=\frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{0}=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم})$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}{(\frac{\pi}{2}+x)}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1\qquad\left(z=\frac{\pi}{2}+x\right)$$

۵) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,\sin(x^2)\sin(x^3)}{5x^6}=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم})$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{x^3}=\frac{1}{5}\times 1\times 1\times 1=\frac{1}{5}$$

نتیجه: از قضیه ۷ نتایج زیادی حاصل می‌شود که بعضی از آن‌ها به صورت زیر می‌باشد. از این نتایج برای حل سریع حدها می‌توان استفاده کرد.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1 \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1 \qquad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{nx}=\frac{m}{n}$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{nx}{\sin(mx)}=\frac{n}{m} \qquad 6)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(mx)}{\sin(nx)}=\frac{m}{n}$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(nx)}{\sin(mx)}=\frac{n}{m} \qquad 8)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(mx)}{\tan(nx)}=\frac{m}{n}$$

مثال ۱۸: مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx-\sin ax}{bx-ax}$ را با فرض $(b\neq a)$، به‌دست آورید.

حل: در برخورد اول پاسخ حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید که به کمک نتیجه قبل می‌توان ابهام را برطرف و مقدار حد را به‌دست آورد.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx-ax}-\frac{\sin ax}{bx-ax}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{(b-a)x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{(b-a)x}$$

$$=\frac{b}{b-a}-\frac{a}{b-a}=\frac{b-a}{b-a}=1$$

تذکر: برای رفع ابهام از حالت $\frac{0}{0}$ روش ساده و جالب دیگری به نام **قاعده هوپیتال** وجود دارد که در فصل چهارم (فصل کاربرد مشتق) با آن آشنا می‌شوید.

قضیه ۸ (قضیه فشردگی)[1]: هر گاه توابع f ، g و h به گونه‌ای باشند که در یک همسایگی محذوف a داشته باشیم: $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ ، همچنین: $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L$ ، در این صورت داریم: $\lim_{x\to a}f(x)=L$

۱- به کمک قضیه ۸ ، قضیه ۷ ثابت می‌شود؛ چون در این کتاب اثبات قضیه‌ها مورد نظر نمی‌باشد، از نظر آموزشی ترجیح داده‌ایم ترتیب قضیه‌ها را چنین بیان کنیم.

مثال ۱۹: مقدار $\lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)$ را محاسبه کنید.

حل: تابع $y=\sin\frac{1}{x}$ در $x=0$ تعریف نشده است و در مبحثی به نام دنباله‌ها ثابت می‌شود این تابع در این نقطه حد ندارد، بنابراین نمی‌توان از قضیه حد حاصل ضرب استفاده کرد. برای محاسبه این حد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x\neq 0\to -1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1 \\ x\neq 0\to x^2>0 \end{array}\right\}\to -x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$$

با فرض $g(x)=-x^2$ ، $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ و $h(x)=x^2$ در هر همسایگی محذوف $x=0$ داریم: $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ و $\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}g(x)=0$

بنابراین شرایط قضیه فشردگی فراهم است و می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)=0$$

مثال ۲۰: هرگاه تابع f به گونه‌ای باشد که برای هر x داشته باشیم: $|f(x)+5|\leq (x-1)^2$ ، مقدار $\lim_{x\to 1}f(x)$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از خواص قدر مطلق داریم:

$$|f(x)+5|\leq (x-1)^2\to -(x-1)^2\leq f(x)+5\leq (x-1)^2$$

$$\to -(x-1)^2-5\leq f(x)\leq (x-1)^2-5$$

با فرض $g(x)=-(x-1)^2-5$ و $h(x)=(x-1)^2-5$ داریم:

$$g(x)\leq f(x)\leq h(x) \ ,\ \lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}h(x)=-5$$

بنابراین شرایط قضیه فشردگی فراهم است و داریم: $\lim_{x\to 1}f(x)=-5$

نکته: در فصل یکم (فصل تابع) مشاهده کردید که تابع جزء صحیح، تابع قدر مطلق و تابع علامت، توابع چند ضابطه‌ای می‌باشند. اگر این نوع توابع در حد ظاهر شوند، در اکثر مواقع به روش ذیل می‌توان حد تابع را محاسبه کرد.

«ابتدا در نزدیکی نقطه‌ای که می‌خواهید حد بگیرید، تابعی مساوی تابع قبلی قرار دهید که در آن جزء صحیح یا قدر مطلق و یا تابع علامت نباشد، سپس حد بگیرید.»

در مواردی هم این روش جواب نمی‌دهد که آنگاه باید به دنبال روش ابتکاری بود. یک مورد را به عنوان نمونه، در مثال ۲۶ آورده‌ایم.

مثال ۲۱: مقدار $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{[x]+2}{3-x}$ را محاسبه کنید.

حل: چون مقادیر x از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، می‌توان فرض کرد که $2 > x > 1$ ، در این فاصله داریم: $[x] = 1$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]+2}{3-x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1+2}{3-x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{3}{3-x} = \frac{3}{3-2} = 3$$

مثال ۲۲: مقدار $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x-1}{[x]-3}$ را به‌دست آورید.

حل: چون مقادیر x از سمت چپ به عدد ۴ نزدیک می‌شوند می‌توان فرض کرد که $4 > x > 3$ و در این فاصله داریم: $[x] = 3$ ، بنابراین $f(x)$ به صورت $f(x) = \frac{x-1}{0}$ در می‌آید و ما چنین تابعی نداریم، بنابراین: $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x-1}{[x]-3} = \lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x-1}{0}$ حد موجود نیست

موجود نبودن حد فوق را به صورت دیگری نیز می‌توان بیان کرد. دامنه تابع $f(x) = \frac{x-1}{[x]-3}$ مجموعه $D_f = (-\infty, 3) \cup [4, +\infty)$ می‌باشد. بنابراین با توجه به دامنه، از سمت چپ نمی‌توان به نقطه $x = 4$ نزدیک شد. لذا حد موجود نمی‌باشد.

مثال ۲۳: مقدار $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4}$ را محاسبه کنید.

حل: وقتی از سمت چپ به نقطه $x = 2$ نزدیک می‌شویم، داریم: $x < 2$ و لذا $x - 2 < 0$ و در نتیجه $|x-2| = -(x-2)$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x^2-4} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{4}$$

مثال ۲۴: مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x-|x|}{[x+1]-x}$ را محاسبه کنید.

حل: چون از سمت راست به $x = 0$ نزدیک می‌شویم پس $x > 0$ و لذا داریم: $|x| = x$

با فرض $0 < x < 1$ داریم: $1 < x + 1 < 2 \to [x+1] = 1$

بنابراین در نزدیکی $x = 0$ حد را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x-|x|}{[x+1]-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x-x}{1-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1-x} = \frac{0}{1} = 0$$

مثال ۲۵: مقدار $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x\, sgn(x^2-4)}{x^2-5x+1}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$2 < x \to 4 < x^2 \to 0 < x^2 - 4 \to sgn(x^2-4) = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x\, sgn(x^2-4)}{x^2-5x+1} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-5x+1} = \frac{2}{4-10+1} = -\frac{2}{5}$$

مثال ۲۶: مقدار $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 \left[\frac{1}{x}\right]\right)$ را به‌دست آورید.

حل: دراین مثال نمی‌توان $\left[\frac{1}{x}\right]$ را برداشت وعدد مشخصی را به جای آن گذاشت، زیرا:

$$x = 0.01 \to \left[\frac{1}{x}\right] = 100\ ,\ x = 0.001 \to \left[\frac{1}{x}\right] = 1000\ ,\ x = 0.0001 \to \left[\frac{1}{x}\right] = 10000$$

برای محاسبه این حد از یکی از خاصیت‌های جزء صحیح و قضیه فشردگی استفاده می‌کنیم.

$$(\forall a \in \mathbb{R} \to a - 1 < [a] \le a) \to \left(x \ne 0 \to \frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}\right)$$

با ضرب طرفین رابطه اخیر در عبارت مثبت x^2 داریم:

$$x^2\left(\frac{1}{x} - 1\right) < x^2\left[\frac{1}{x}\right] \le x^2\left(\frac{1}{x}\right) \to x - x^2 < x^2\left[\frac{1}{x}\right] \le x$$

با فرض $g(x) = x - x^2$ ، $h(x) = x$ و $f(x) = x^2\left[\frac{1}{x}\right]$ داریم:

$$g(x) \le f(x) \le h(x)\ ,\ \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

بنابراین شرایط قضیه فشردگی فراهم است و لذا: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2\left[\frac{1}{x}\right] = 0$

تمرین

۱- با تشکیل جدول، حد چپ و حد راست توابع زیر را در نقطه داده شده به‌دست آورید.

۱) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}\ ,\ x=3$ ۲) $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}\ ,\ x=1$

۳) $f(x)=x\,sgn(x-1)\ ,\ x=1$ ۴) $f(x)=x[x]\ ,\ x=0$

۵) $f(x)=[x]+[-x]\ ,\ x=-1$ ۶) $f(x)=\sqrt{2-x}\ ,\ x=2$

۲- نمودار توابع زیر را رسم کرده و به کمک آن حد چپ و حد راست تابع را در نقطه داده شده به‌دست آورید.

۱) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\geq 0\\ x+1 & x<0\end{cases}\ ,\ x=0$ ۲) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geq -1\\ 1-x & x<-1\end{cases}\ ,\ x=-1$

۳) $f(x)=(x-1)[x]\ ,\ x=0$ ۴) $f(x)=x^2\,sgn\,x\ ,\ x=0$

۵) $f(x)=\frac{x+1}{|x+1|}\ ,\ x=-1$ ۶) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-2}\ ,\ x=2$

۳- به کمک قضایای حد، حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+1)$ ۲) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-1}{x^3+2x-1}$

۳) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-3x}$ ۴) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[4]{x^2-3x}$

۵) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{(x-2)^3}$ ۶) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{(x-4)^5}$

۷) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}}(3\cos x+2\sin x)$ ۸) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$

۹) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[5]{3x-2(x^2+5x)}$ ۱۰) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 x}$

۴- حدهای زیر را پس از رفع ابهام محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-5x+4}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$

۳) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^3+x^2+x+3}{x^2-1}$ ۴) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$

۵) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}$ ۶) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{4-x}$

۷) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ ۸) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x+5}{\sqrt{3x+16}-1}$

۹) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x+\sqrt{x+18}}{\sqrt{3x+7}-1}$ ۱۰) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2-9}{2x^2+7x+3}}$

۱۱) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ ۱۲) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+a^3}-a}{x}\quad (a\neq 0)$

۵- حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2}$

۳) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{1-x^2}$ ۴) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\tan 3x}$

۵) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\tan 3x)-2x}{5x}$ ۶) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin 3x^2}{x^2\sin x}$

۷) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$ ۸) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

۹) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)$ ۱۰) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left((x^2-4)\cos\frac{1}{x-2}\right)$

۶- اگر برای هر x در فاصله $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ داشته باشیم:

$$۳-\cos^۲ x \le f(x) \le ۲+x^۲$$

مقدار $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ را محاسبه کنید.

۷- اگر برای هر x در هر همسایگی راست $x=۱$ داشته باشیم: $x^۲-۲x \le f(x) \le \frac{x^۲-۴}{x+۲}$ مقدار $\lim\limits_{x\to ۱^+}(۲f(x)+۵)$ را به‌دست آورید.

۸- اگر برای هر x داشته باشیم $|f(x)-۴| \le (x-۳)^۲$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{f(x)}$ را به‌دست آورید.

۹- در تابع زیر، مقادیر a و b را چنان پیدا کنید که حد چپ و حد راست در نقطه $x=۲$ به ترتیب ۳ و ۵ باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲+۲bx & ۲<x \\ ۲ax-۳b & x\le ۲ \end{cases}$$

۱۰- در تابع زیر رابطه‌ای بین a و b بیابید تا تابع در نقطه $x=۳$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx-۱ & x<۳ \\ ۲ & x=۳ \\ bx^۲-a & ۳<x \end{cases}$$

۱۱- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x=۱$ و $x=۲$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۲ax-b & x<۱ \\ bx^۲-۳a+۱ & ۱\le x\le ۲ \\ \frac{a(x^۲-۴)}{x-۲} & ۲<x \end{cases}$$

۱۲- اگر داشته باشیم: $f(x)=۳x^۲-x$، مقدار حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$

۲) $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$

۱۳- مقدار حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}((x-۱)\, sgn\, x)$

۲) $\lim\limits_{x\to -۳^+}\frac{(x+۳)\, sgn(x^۲-۹)}{x^۲-۹}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰}\left(x^۲+\frac{|x|}{x}\right)$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\left(\frac{|x-۱|}{x^۲-۱}\sqrt{|x-۱|}\right)$

۵) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{x-۱}{[x]-۱}$

۶) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{[x]-۱}$

۷) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{[x]^۲-[x^۲]}{x-[x]}$

۸) $\lim\limits_{x\to ۱^-}([x](x-[x])^۲)$

۹) $\lim\limits_{x\to ۲^+}([x]+[-x])$

۱۰) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}([x]+[-x])$

۱۱) $\lim\limits_{x\to ۲^+}|x-[x]|$

۱۲) $\lim\limits_{x\to -۴^+}|sgn(x)+۴|$

۱۳) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}([x]+|۱-x|)$

۱۴) $\lim\limits_{x\to -۱}\left(\left[\frac{x^۲}{x^۲+۲}\right](x^۲+۱)\right)$

۱۵) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{|\sin x|}{x}$

۱۶) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{۲}}$

۲-۲ تعمیم مفهوم حد

۱) حدهای نامتناهی: این مفهوم را همراه با یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۱: تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید. این تابع در نقطه $x=0$ تعریف نشده است. جدول‌های زیر وضعیت تابع را در نزدیکی این نقطه نمایش می‌دهند.

x	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	10^{-4}	10^{-5}	...	۰
$f(x)$	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	10^{4}	10^{5}	...	

x	۱-	۰/۵-	۰/۱-	۰/۰۱-	۰/۰۰۱-	-10^{-4}	...	۰
$f(x)$	۱-	۲-	۱۰-	۱۰۰-	۱۰۰۰-	-10^{4}	...	

جدول‌های فوق نشان می‌دهد هنگامی که مقادیر x از سمت راست یا از سمت چپ به نقطه $x=0$ نزدیک می‌شوند، مقادیر $f(x)$ به سمت عدد مشخصی نزدیک نمی‌گردند. بنابراین حدهای $\underset{x\to 0^-}{Lim}\frac{1}{x}$ و $\underset{x\to 0^+}{Lim}\frac{1}{x}$ موجود نمی‌باشد.

در این جدول‌ها مشاهده می‌کنید هنگامی که مقادیر x از سمت راست به صفر نزدیک می‌شوند، مقادیر $f(x)$ به‌طور بی‌کران افزایش می‌یابد و هنگامی که مقادیر x از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شوند، مقادیر $f(x)$ به‌طور بی‌کران کاهش می‌یابد. این رفتار تابع را به صورت $\underset{x\to 0^-}{Lim}\frac{1}{x}=-\infty$ و $\underset{x\to 0^+}{Lim}\frac{1}{x}=+\infty$ نمایش می‌دهیم.

تذکر: دو علامت $-\infty$ و $+\infty$ عدد نمی‌باشند، بلکه دو نماد برای نمایش رفتار تابع هستند. ما از این به بعد به مجموعه اعداد حقیقی دو علامت $-\infty$ و $+\infty$ را اضافه کرده و این مجموعه جدید را، مجموعه گسترش یافته اعداد حقیقی نامیده و با $\mathbb{R}^*$ نمایش می‌دهیم. در این مجموعه، رفتار ما با $-\infty$ و $+\infty$ شبیه اعداد خواهد بود. به عنوان نمونه مقدار $\underset{x\to 0^+}{Lim}\frac{1}{x}$ در $\mathbb{R}$ موجود نیست در حالی که مقدار این حد در $\mathbb{R}^*$ موجود و برابر $+\infty$ است. از این به بعد، ما حدها را در مجموعه گسترش یافته اعداد حقیقی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این مجموعه، قوانین زیر را که در محاسبه حدها ظاهر می‌شود، خواهیم داشت. $(a\in\mathbb{R})$

$$\begin{cases}a\times(+\infty)=+\infty\\ a\times(-\infty)=-\infty\end{cases}\quad(a>0)\qquad\begin{cases}a\times(+\infty)=-\infty\\ a\times(-\infty)=+\infty\end{cases}\quad(a<0)$$

$$\begin{cases}a+(+\infty)=+\infty\\ a+(-\infty)=-\infty\end{cases}\qquad\begin{cases}a-(+\infty)=a+(-\infty)=-\infty\\ a-(-\infty)=a+(+\infty)=+\infty\end{cases}$$

$$\begin{cases}(+\infty)+(+\infty)=+\infty\\ (-\infty)+(-\infty)=-\infty\end{cases}\qquad\begin{cases}(+\infty)\times(+\infty)=+\infty\\ (-\infty)\times(-\infty)=+\infty\\ (-\infty)\times(+\infty)=-\infty\end{cases}$$

در مجموعه گسترش یافته اعداد حقیقی، غیر ازعمل $\frac{\cdot}{\cdot}$، اعمال زیر نیز مبهم بوده و باید رفع ابهام گردد.

۱) $0\times(\pm\infty)$ ۲) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ۳) $(+\infty)-(+\infty)$

۴) 0^0 ۵) $1^{(\pm\infty)}$ ۶) $(\pm\infty)^0$

با روش رفع ابهام موردهای ۱، ۲ و ۳ در همین بخش و با موردهای ۴، ۵ و ۶ در فصل چهارم (فصل کاربرد مشتق) آشنا خواهید شد.

مثال ۲: به کمک تشکیل جدول، حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ را در نقطه $x=0$ به‌دست آورید.

حل:

x	۱	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	...	۰
$f(x)$	۱	10^{2}	10^{4}	10^{6}	10^{8}	...	

x	۱-	۰/۱-	۰/۰۱-	۰/۰۰۱-	۰/۰۰۰۱-	...	۰
$f(x)$	۱	10^{2}	10^{4}	10^{6}	10^{8}	...	

با توجه به جدول‌های فوق داریم: $\underset{x\to 0^-}{Lim}\frac{1}{x^2}=+\infty$ ، $\underset{x\to 0^+}{Lim}\frac{1}{x^2}=+\infty$

چون حد چپ و حد راست در $x=0$ برابرند، پس می‌توان نوشت: $\underset{x\to 0}{Lim}\frac{1}{x^2}=+\infty$

قضیه ۱: هرگاه تابع g در همسایگی محذوف a غیر صفر و داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to a} g(x) = ۰$

هم‌چنین برای تابع f داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ و $L \neq ۰$، آنگاه مقدار $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

برابر $+\infty$ یا $-\infty$ است (علامت بی‌نهایت بستگی به علامت دو تابع f و g در نزدیکی $x = a$ دارد).

مثال ۳: مقدار $\lim\limits_{x\to ۳^-} \frac{۲x}{x-۳}$ را به‌دست آورید.

حل: داریم: $\lim\limits_{x\to ۳^-}(۲x) = ۶$ و $\lim\limits_{x\to ۳^-}(x-۳) = ۰$ و مخرج با مقادیر منفی به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین مقدار حد برابر $-\infty$ است؛ این مطلب را به صورت $\lim\limits_{x\to ۳^-} \frac{۲x}{x-۳} = \frac{۶}{۰^-} = -\infty$ نشان می‌دهیم. عبارت ۰^- را صفر منفی می‌خوانیم.

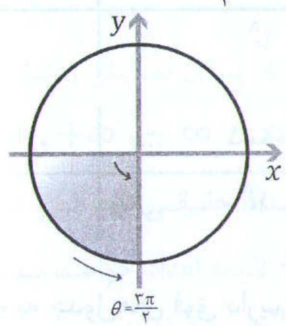
مثال ۴: مقدار $\lim\limits_{x\to -۲^-} \frac{x+۴}{x^۲-۴}$ را به‌دست آورید.

حل: داریم: $\lim\limits_{x\to -۲^-}(x+۴) = ۲$ و $\lim\limits_{x\to -۲^-}(x^۲-۴) = ۰$ و مخرج با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین مقدار حد برابر $+\infty$ است؛ این مطلب را به صورت $\lim\limits_{x\to -۲^-} \frac{x+۴}{x^۲-۴} = \frac{۲}{۰^+} = +\infty$ نشان می‌دهیم. عبارت ۰^+ را صفر مثبت می‌خوانیم.

مثال ۵: مقدار $\lim\limits_{\theta\to \frac{۳\pi}{۲}^-} \tan\theta$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\lim_{\theta\to \frac{۳\pi}{۲}^-} \tan\theta = \lim_{\theta\to \frac{۳\pi}{۲}^-} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\lim\limits_{\theta\to \frac{۳\pi}{۲}^-} \sin\theta}{\lim\limits_{\theta\to \frac{۳\pi}{۲}^-} \cos\theta} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

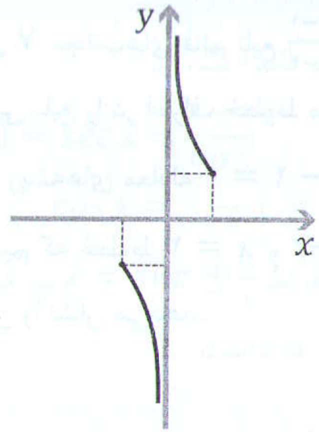


لازم به یادآوری است هنگامی که مقادیر θ از سمت کمتر به $\frac{۳\pi}{۲}$ نزدیک می‌شوند در ناحیه سوم دایره مثلثاتی هستیم و در این ناحیه کسینوس منفی می‌باشد.

مثال ۶: مقدار $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{۲x}{\sqrt{x-۱}}$ را به‌دست آورید.

حل: با توجه به اینکه $x > ۱$، می‌توان نوشت: $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{۲x}{\sqrt{x-۱}} = \frac{۲}{۰^+} = +\infty$

مجانب قائم: با مجانب قائم در فصل تابع، هنگام رسم نمودارهای $\tan x$، $\cot x$ و تابع لگاریتم آشنا شدید. برای مرور مجدد این مفهوم تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را در نظر بگیرید. با توجه به جدول‌های ابتدای این بخش نمودار قسمتی از تابع f در نزدیکی $x = ۰$، به صورت مقابل می‌باشد.



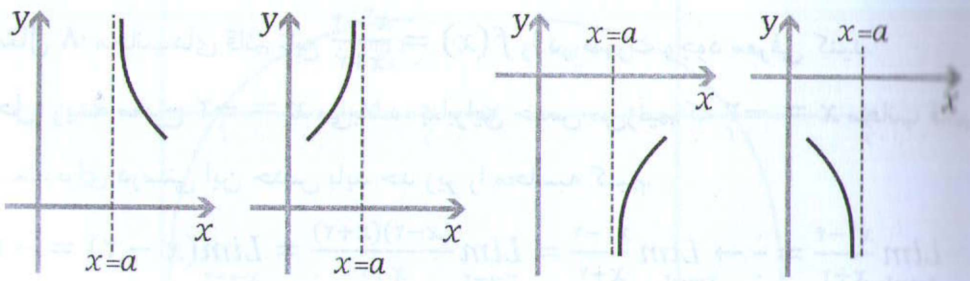
در شکل فوق مشاهده می‌کنیم که هرچه مقادیر x به صفر نزدیکتر می‌شوند فاصله منحنی تا خط $x = ۰$ (محور yها) کمتر می‌شود ولی این دو هرگز هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند، در چنین حالتی $x = ۰$ را مجانب قائم تابع $f(x)$ می‌نامند. تعریف دقیق مجانب قائم به صورت زیر است.

تعریف ۱: خط $x = a$ را مجانب قائم تابع f می‌گوییم هرگاه حداقل یکی از حدهای زیر برقرار باشد.

۱) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

نکته: برای چهار حالت تعریف فوق، نمودار تابع f در نزدیکی خط $x = a$، به صورت‌های زیر می‌باشد.



۱) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ۳) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

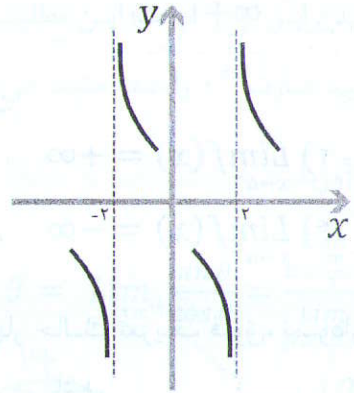
مثال ۷: مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x^۲-۴}$ را در صورت وجود به‌دست آورید و شکل تقریبی تابع را در اطراف خطوط مجانب رسم کنید.

حل: ریشه‌های معادله $x^۲-۴=۰$ عبارتند از: $x=۲$ و $x=-۲$. بنابراین حدس می‌زنیم که خطوط $x=۲$ و $x=-۲$ مجانب قائم هستند. حدهای زیر درستی این حدس را نشان می‌دهد.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴}=\frac{۳}{۰^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴}=\frac{۳}{۰^-}=-\infty\end{array}\right\}\to x=۲ \text{ مجانب قائم}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -۲^+}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴}=\frac{-۵}{۰^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -۲^-}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴}=\frac{-۵}{۰^+}=-\infty\end{array}\right\}\to x=-۲ \text{ مجانب قائم}$$

شکل تقریبی تابع در اطراف مجانب‌های قائم به صورت مقابل است.



مثال ۸: مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x+۲}$ را در صورت وجود معرفی کنید.

حل: ریشه مخرج $x=-۲$ می‌باشد، بنابراین حدس می‌زنیم که $x=-۲$ مجانب قائم است. برای درستی این حدس باید حد زیر را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to-۲}\frac{x^۲-۴}{x+۲}=\frac{۰}{۰}\to\lim_{x\to-۲}\frac{x^۲-۴}{x+۲}=\lim_{x\to-۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x+۲}=\lim_{x\to-۲}(x-۲)=-۴$$

چون حد بی‌نهایت نشد پس حدس ما درست نیست و خط $x=-۲$ مجانب قائم نمی‌باشد.

مثال ۹: تابع $f(x)=\sec x$ دارای بی‌نهایت مجانب قائم است، زیرا:

$$f(x)=\sec x=\frac{۱}{\cos x}$$

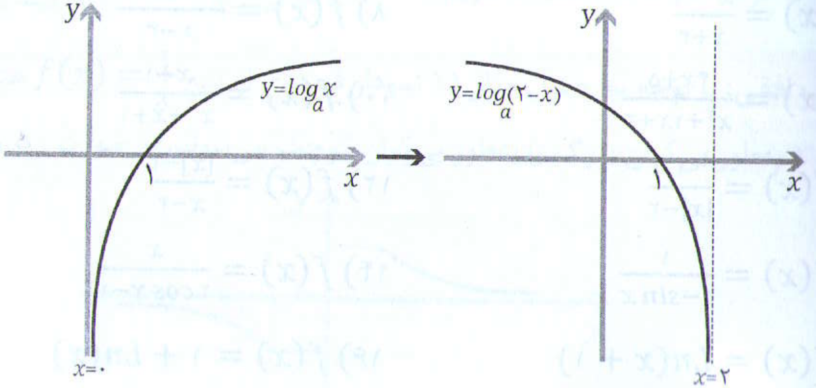
$$\cos x=۰\to x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

می‌توان نشان داد حد چپ یا راست در هر یک از نقاط $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$ بی‌نهایت می‌شود. بنابراین این تابع دارای تعداد نامتناهی مجانب قائم است.

به عنوان نمونه برای $x=\frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\sec x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱}{\cos x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty\\ \left(x>\frac{\pi}{۲}\to x \text{ در ناحیه دوم } \to \cos x<۰\right)\\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\sec x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{۱}{\cos x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty\\ \left(x<\frac{\pi}{۲}\to x \text{ در ناحیه اول } \to \cos x>۰\right)\end{array}\right\}\to x=\frac{\pi}{۲}\quad(\text{مجانب قائم})$$

مثال ۱۰: برای تابع لگاریتم به کمک جدول یا نمودار می‌توان نشان داد که: $\lim\limits_{x\to۰^+}\log x=-\infty$، در نتیجه داریم: $\lim\limits_{x\to۲^-}\log(۲-x)=-\infty$. لذا خط $x=۲$ مجانب قائم تابع $f(x)=\log(۲-x)$ می‌باشد.



تمرین

۱- حاصل هر یک از حدهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x+3}{1-x}$　　۲) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-4x}{x-2}$

۳) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{-1}{(x+1)^2}$　　۴) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-x+3}{(x-2)^2}$

۵) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-1}{x^4}$　　۶) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3x-1}{x^5}$

۷) $\lim\limits_{x\to -1^+} (\frac{-2x}{x+1})^5$　　۸) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \cot x$

۹) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$　　۱۰) $\lim\limits_{x\to 0^-} \csc x$

۲- مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود معرفی کنید. در صورت وجود مجانب قائم، شکل تقریبی تابع را در نزدیکی یکی از مجانب‌ها رسم کنید.

۱) $f(x) = \frac{x}{x-2}$　　۲) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

۳) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$　　۴) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{x+1}$

۵) $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2-9}}$　　۶) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

۷) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$　　۸) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$

۹) $f(x) = \frac{4x+5}{x^2+2x+3}$　　۱۰) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$

۱۱) $f(x) = \frac{1}{|x|-2}$　　۱۲) $f(x) = \frac{[x]-3}{x-3}$

۱۳) $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$　　۱۴) $f(x) = \frac{x}{2\cos x-1}$

۱۵) $f(x) = Ln(x+1)$　　۱۶) $f(x) = 1 + Ln(x)$

۲) حد در بی‌نهایت: این مفهوم را همراه با یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۱۱: بار دیگر تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید. جدول‌های زیر وضعیت تابع را هنگامی که مقادیر x به‌طور بی‌کران بزرگ یا کوچک می‌شوند را نشان می‌دهد.

x	10	100	10^5	10^{10}	10^{100}	...	$+\infty$
$f(x)$	$0/1$	$0/01$	10^{-5}	10^{-10}	10^{-100}	...	

x	-10	-100	-10^5	-10^{10}	-10^{100}	...	$-\infty$
$f(x)$	$-0/1$	$-0/01$	-10^{-5}	-10^{-10}	-10^{-100}	...	

در جدول‌های فوق مشاهده می‌کنیم هنگامی که مقادیر x به‌طور بی‌کران افزایش یا به‌طور بی‌کران کاهش می‌یابد، مقدار $f(x)$ به صفر نزدیک می‌شود. این مطلب را به صورت زیر نشان داده و آن را حد در بی‌نهایت می‌نامیم.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

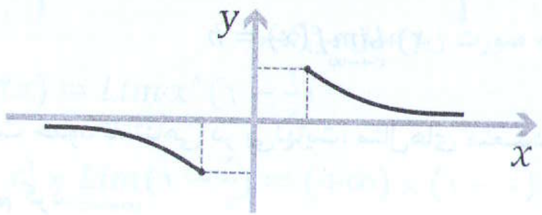
مثال ۱۲: با تشکیل جدول‌هایی مشابه جدول‌های مثال قبل، می‌توان نشان داد که مقدار حدهای زیر صفر است.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{-3}{x^4} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^5} = 0$$

قضیه ۲: هرگاه $n \in \mathbb{N}$، همواره داریم:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

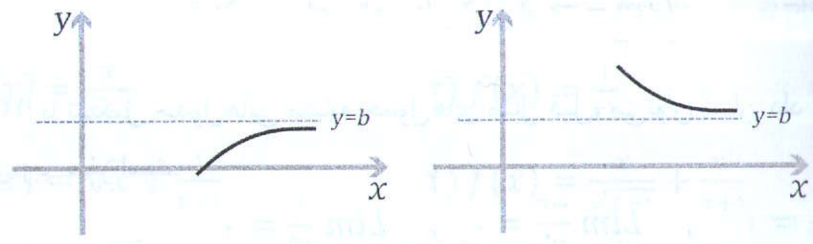
مجانب افقی: با توجه به جدول مثال ۱۱ نمودار قسمتی از تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ هنگامی که مقادیر x به‌طور بی‌کران بزرگ یا به‌طور بی‌کران کوچک می‌شوند، به صورت زیر می‌باشد.



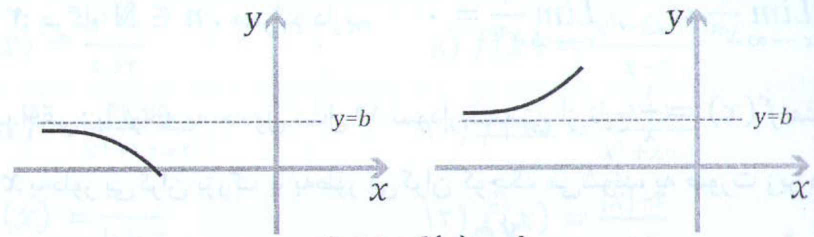
این نمودار نشان می‌دهد، هنگامی که مقادیر x به‌طور بی‌کران بزرگ یا کوچک می‌شوند، فاصله نمودار تابع $f(x)$ با خط $y = 0$ (محور xها) کاهش پیدا می‌کند ولی این دو هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند.
هم‌چنین برای تابع $f(x) = 2^x$ در فصل یکم مشاهده کردید هنگامی که مقادیر x به‌طور بی‌کران کوچک می‌شوند فاصله نمودار تابع $f(x)$ با خط $y = 0$ (محور xها) کاهش پیدا می‌کند ولی این دو هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.
در حالت‌های فوق خط $y = 0$ را مجانب افقی تابع f می‌گوییم. می‌توان عبارت زیر را به عنوان تعریف مجانب افقی در نظرگرفت.

تعریف ۲: خط $y = b$ را مجانب افقی تابع غیر ثابت f می‌نامیم، اگر حداقل یکی از حالت‌های مقابل برقرار باشد. ۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, ۲) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

نکته: نمودار تابع f در اطراف مجانب افقی در هر مورد، به یکی از صورت‌های زیر می‌باشد.



۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$



۲) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

تذکر: بعد از بحث حدود نامتناهی در بی‌نهایت، مثال‌های متعددی را در مورد مجانب افقی ارائه خواهیم کرد.

۲) حدود نامتناهی در بی‌نهایت: این مطلب را با یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۱۳: تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید. جدول زیر رفتار تابع را هنگامی که مقادیر x به‌طور بی‌کران افزایش می‌یابد، نشان می‌دهد.

x	1	10	10^2	10^3	10^5	10^{10}	...	$+\infty$
$f(x)$	1	10^3	10^6	10^9	10^{15}	10^{30}	...	

مشاهده می‌کنیم با افزایش مقادیر x، مقادیر $f(x)$ نیز به‌طور بی‌کران افزایش می‌یابند. در این حالت می‌گوییم حد تابع در بی‌نهایت، نامتناهی است و آن را به صورت $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۴: با تشکیل جدول برای هر یک از حدهای زیر مشاهده خواهید کرد وقتی مقادیر x به‌طور بی‌کران بزرگ یا کوچک می‌شوند، مقادیر $f(x)$ نیز چنین وضعیتی دارند.

$$\lim_{x\to+\infty} 5x = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} 7x = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty$$

قضیه ۳: هرگاه n یک عدد طبیعی باشد، همواره داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{زوج } n \\ -\infty & \text{فرد } n \end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

مثال ۱۵: به کمک قضیه‌های حد، حدهای زیر محاسبه شده است.

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 + 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = (+\infty) - (+\infty)$ (مبهم)

برای رفع ابهام این حد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 2x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{2}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \times \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right) = (+\infty) \times (1 - 0) = +\infty$$ (بنابر قضیه ۲)

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3+3x-5)=\lim\limits_{x\to-\infty}-4x^3+\lim\limits_{x\to-\infty}3x-\lim\limits_{x\to-\infty}5$

$=(+\infty)+(-\infty)-5=(+\infty)+(-\infty)$ (مبهم)

برای رفع ابهام این حد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}(-4x^3+3x-5)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(-4+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^3\times\lim_{x\to-\infty}\left(-4+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)$$

$$=(-\infty)\times(-4+0-0)=(-\infty)\times(-4)=+\infty$$

نتیجه: از قضیه‌های بخش قبل و مثال ۱۵ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه $p(x)$ یک چندجمله ای از درجه n باشد همواره داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}p(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

مثال ۱۶: به کمک نتیجه قبل، حدهای زیر محاسبه شده است.

$$\lim_{x\to-\infty}(-3x^2+5x-1)=\lim_{x\to-\infty}-3x^2=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2+8x^4+3x-3)=\lim_{x\to+\infty}8x^4=+\infty$$

مثال ۱۷: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}2x+1}{\lim\limits_{x\to+\infty}x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}2x}{\lim\limits_{x\to+\infty}x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ (مبهم)

برای رفع ابهام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{3}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\frac{2+0}{1-0}=2$$ (بنابر قضیه۲)

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-5}{4x^3-8x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}4x^2-5}{\lim\limits_{x\to+\infty}4x^3-8x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}4x^2}{\lim\limits_{x\to+\infty}4x^3}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ (مبهم)

با تجربه‌ای که از حل مثال‌های قبل به‌دست آورده‌ایم رفع ابهام را به صورت مختصر می‌نویسیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-5}{4x^3-8x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{4x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-8x}{3x+5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3-8x}{\lim\limits_{x\to+\infty}3x+5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3}{\lim\limits_{x\to+\infty}3x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ (مبهم)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-8x}{3x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3}x^2=+\infty$$

نتیجه: هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای‌هایی به ترتیب از درجه n و m باشند، داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

الف) مقدار حد برابر صفر است، هرگاه $n<m$

ب) مقدار حد برابر عدد غیر صفر $\frac{a_n}{b_m}$ است، هرگاه $n=m$

ج) مقدار حد برابر $+\infty$ یا $-\infty$ است، هرگاه $n>m$

مثال ۱۸: مقدار هر یک از حدهای زیر پس از رفع ابهام محاسبه شده است.

۱) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}=\dfrac{+\infty}{-\infty}$ (مبهم)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})}}{x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x(1+\frac{4}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x(1+\frac{4}{x})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}}=\frac{-\sqrt{1+0}}{1+0}=-1$$

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-3}=\dfrac{-\infty}{+\infty}$ (مبهم)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x^2})}}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\frac{5}{x}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{3}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{3}{x}}=\frac{0-\sqrt{4+0}}{\sqrt{1+0}-0}=\frac{-2}{1}=-2$$

مثال ۱۹: در حدهای زیر حالت‌هایی از رفع ابهام $(\pm\infty)\times 0$ و $\infty-\infty$ ارائه شده است.

۱) $\displaystyle \lim_{x\to -2^+}(x^2-4)\frac{1}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to -2^+}(x^2-4)\times\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{(x+2)^2}=0\times\infty$

برای رفع ابهام صورت و مخرج را تجزیه و سپس ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -2^+}(x^2-4)\frac{1}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to -2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{x-2}{x+2}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

۲) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x}-\lim_{x\to +\infty}x=(+\infty)-(+\infty)$

برای رفع ابهام، تابع را در مزدوجش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{+\infty}{+\infty}\quad(\text{مبهم})$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

۳) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=(+\infty)-(+\infty)\quad(\text{مبهم})$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{x^4}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

مثال ۲۰: مجانب‌های افقی توابع زیر را در صورت وجود معرفی کنید.

۱) $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+1}$ ۲) $g(x)=\dfrac{2x}{x^2-3}$

۳) $h(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}$ ۴) $k(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

۵) $e(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$ ۶) $s(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

حل:

۱) $\displaystyle \lim_{x\to \pm\infty}f(x)=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x-2}{3x+1}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}\to y=\frac{1}{3}$ مجانب افقی

۲) $\displaystyle \lim_{x\to \pm\infty}g(x)=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{2x}{x^2-3}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{2}{x}=0\to y=0$ مجانب افقی

۳) $\displaystyle \lim_{x\to \pm\infty}h(x)=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^3}{|x|}$

$$\left.\begin{aligned}L_1&=\lim_{x\to +\infty}h(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to +\infty}x^2=+\infty\\ L_2&=\lim_{x\to -\infty}h(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{-x}=\lim_{x\to -\infty}-x^2=-\infty\end{aligned}\right\}\to \text{تابع مجانب افقی ندارد}$$

۴) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty}k(x)=\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+1}-x=(+\infty)-(-\infty)=+\infty$

$\displaystyle \lim_{x\to +\infty}k(x)=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+1}-x=(+\infty)-(+\infty)\quad(\text{مبهم})$

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0\to y=0\quad\text{مجانب افقی}$$

۵) $D_e=\{x|4-x^2>0\}=(-2,2)$

با توجه به دامنه، نمی‌توان حد در بی‌نهایت را برای تابع $e(x)$ محاسبه کرد پس این تابع مجانب افقی ندارد.

۶) ابتدا دامنه تابع s را به‌دست می‌آوریم تا ببینیم امکان محاسبه حد در بی‌نهایت وجود دارد یا خیر؟

$D_s=\{x|\,x^2-4>0\}=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

پس می‌توان حد در بی‌نهایت را محاسبه کرد.

$$\lim_{x\to \pm\infty}s(x)=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{2x}{|x|}$$

$L_1=\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{|x|}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{x}=2\to y=2$ مجانب افقی

$L_2=\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{|x|}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{-x}=-2\to y=-2$ مجانب افقی

بنابراین تابع $s(x)$ دارای دو مجانب افقی می‌باشد.

تمرین

۱- با تشکیل جدول، حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-1}{x^2}$ ۲) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-1}{x}$

۳) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^x$ ۴) $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x$

۵) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{1}{2})^x$ ۶) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\frac{1}{2})^x$

۷) $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_2 x$ ۸) $\lim\limits_{x\to -\infty} \log_2 x$

۲- به کمک قضیه‌ها و نتیجه‌های حد در بی‌نهایت، حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to -\infty} (5x^3 - 8x + 1)$ ۲) $\lim\limits_{x\to +\infty} (8x^2 - 7x^3 + 2x + 1)$

۳) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2+3x}{3-2x^2}$ ۴) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x^3-8x+1}{-4x^3+2x}$

۵) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x+1}{8x^2-3x}$ ۶) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x-x^5}{2x^2+7x^6}$

۷) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x^3-7x+1}{2x^2+3}$ ۸) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{5x-7x^4}{8x^3+2x-1}$

۹) $\lim\limits_{x\to -\infty} (3x + \frac{1}{x-1})$ ۱۰) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x + 1 + \frac{3x-1}{x+1})$

۱۱) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+x+1}}$ ۱۲) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x+x^2}}{4x-1}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)$ ۱۴) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3+2x+1} + 3x\right)$

۱۵) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)$ ۱۶) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2-2x} - \sqrt{x^2+5}\right)$

۱۷) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right)$ ۱۸) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x} + x\right)$

۱۹) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left((x-1)(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1)\right)$ ۲۰) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \left((1+\cos 2x)\tan x\right)$

۲۱) $\lim\limits_{x\to -4^+} (\frac{2}{x^2+3x-4} + \frac{3}{x+4})$ ۲۲) $\lim\limits_{x\to 2^-} (\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^2-4})$

۳- قضیه فشردگی قابل تعمیم برای حد در بی‌نهایت نیز می‌باشد. به کمک این مطلب $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ را محاسبه کنید.

۴- اگر به ازای مقدارهای بسیار بزرگ x داشته باشیم: $\frac{4x^2+x-1}{8x^2+5} \le f(x) \le \frac{x-5}{2x+3}$ مقدار $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ را به کمک تعمیم قضیه فشردگی برای حد در بی‌نهایت، به‌دست آورید.

۵- با فرض $f(x) = \frac{x}{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+4}{x-2}$، مقدار حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(g(x))}{2x-3}$ ۲) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{g(f(x))}{2x+1}$

۶- در حدهای زیر، مقادیر عدد طبیعی n و عدد حقیقی a را به‌دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x^n+x^2+3}{x^2+4x-2} = 2$ ۲) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3-3x^2+7}{x^n+x^2-5} = 0$

۳) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^n-2x^2+5}{x^3+4x^2-7x+3} = 0$ ۴) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{ax^3+3x^2-1}{x^2-2x+4} = -4$

۵) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^n+x+1}{x^2+2} = +\infty$ ۶) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^n-3x+14}{x^3+6} = 0$

۷) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x^n+2x^2+1}{ax^3+2} = 2$ ۸) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^n+x^4+3}{x^n-3x^3+5} = +\infty$

۷- مجانب‌های افقی توابع زیر را در صورت وجود معرفی کنید.

۱) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ ۲) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x}$

۳) $f(x) = \frac{x-2}{3-x^2}$ ۴) $f(x) = \frac{-2}{4-x^2}$

۵) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ ۶) $f(x) = \frac{2}{|x|-1}$

۷) $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x-x^2}}$ ۸) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x}{x+2}$

۹) $f(x) = 1 + 2^{-x}$ ۱۰) $f(x) = e^{2x} - 3$

۱۱) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$ ۱۲) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - x$

۲-۳ پیوستگی

تعریف ۱: تابع f را در $x = a$ پیوسته گوییم، هرگاه: $\underset{x \to a}{Lim} f(x) = f(a)$

نکته: در تعریف فوق به‌طور ضمنی سه شرط برای پیوستگی تابع f در $x = a$ لازم است:

الف) $f(a)$ موجود باشد   ب) $\underset{x \to a}{Lim} f(x)$ موجود باشد   ج) $\underset{x \to a}{Lim} f(x) = f(a)$

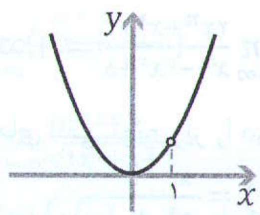
اگر حداقل یکی از سه شرط فوق برقرار نباشد، گوییم تابع f در $x = a$ پیوسته نیست یا گوییم f در $x = a$ یک ناپیوستگی دارد.

تعریف ۲: تابع f را در $x = a$ پیوسته از راست گوییم، هرگاه: $\underset{x \to a^+}{Lim} f(x) = f(a)$

تعریف ۳: تابع f را در $x = a$ پیوسته از چپ گوییم، هرگاه: $\underset{x \to a^-}{Lim} f(x) = f(a)$

قضیه ۱: اگر تابع f در $x = a$ پیوستگی راست و پیوستگی چپ داشته باشد، آنگاه تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است.

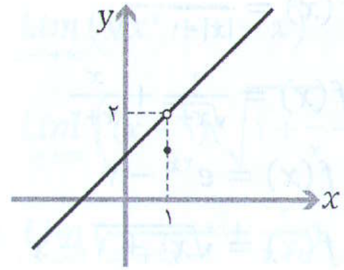
مثال ۱: تابع $f(x) = \frac{x^۳ - x^۲}{x - ۱}$ را در نظر بگیرید. چون $f(۱)$ تعریف نمی‌شود پس شرط اول پیوستگی برقرار نیست و لذا این تابع در $x = ۱$ پیوسته نمی‌باشد. نمودار تابع f به صورت مقابل است.



$$f(x) = \frac{x^۲(x-۱)}{x-۱} = x^۲ \quad (x \neq ۱)$$

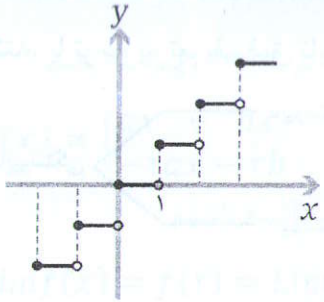
مثال ۲: تابع $f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x \neq ۱ \\ ۱ & x = ۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. در مورد این تابع داریم:

$f(۱) = ۱$ و $\underset{x \to ۱}{Lim} f(x) = ۲$ در نتیجه داریم: $\underset{x \to ۱}{Lim} f(x) \neq f(۱)$. پس شرط سوم پیوستگی برقرار نیست و لذا این تابع در $x = ۱$ پیوسته نمی‌باشد. نمودار تابع f به صورت مقابل است.



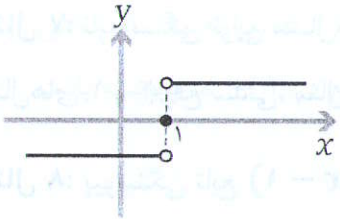
مثال ۳: تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = ۱$ پیوسته نمی‌باشد زیرا $\underset{x \to ۱}{Lim} [x]$ موجود نیست، ولی این تابع در نقطه $x = ۱$ پیوستگی راست دارد زیرا:

$$\underset{x \to ۱^+}{Lim} [x] = f(۱) = ۱$$



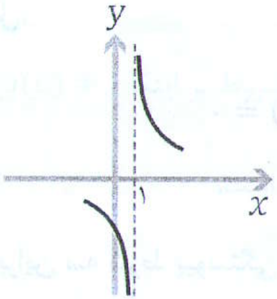
مثال ۴: تابع $f(x) = sgn(x - ۱)$ در نقطه $x = ۱$ نه پیوستگی راست و نه پیوستگی چپ دارد زیرا:

$$\underset{x \to ۱^+}{Lim} f(x) = ۱ \ , \ \underset{x \to ۱^-}{Lim} f(x) = -۱ \ , f(۱) = ۰$$



مثال ۵: تابع $f(x) = \frac{۱}{x-۱}$ در نقطه $x = ۱$ پیوسته نمی‌باشد، زیرا $f(۱)$ موجود نیست. برای این تابع داریم: $\underset{x \to ۱^+}{Lim} f(x) = +\infty \ , \ \underset{x \to ۱^-}{Lim} f(x) = -\infty$

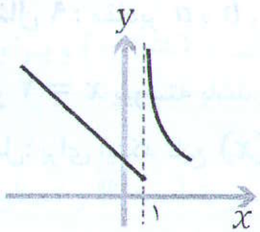
نمودار f در اطراف نقطه $x = ۱$ به صورت مقابل است.



مثال ۶: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x-۱} & x > ۱ \\ ۲ - x & x \leq ۱ \end{cases}$ در نقطه $x = ۱$ فقط پیوستگی چپ دارد. زیرا:

$$\underset{x \to ۱^+}{Lim} f(x) = +\infty \ , \ \underset{x \to ۱^-}{Lim} f(x) = f(۱) = ۱$$

نمودار f در اطراف نقطه $x = ۱$ به صورت مقابل است.



تعریف ۴: هرگاه برای تابع f در نقطه $x = a$ داشته باشیم:

الف) $\underset{x \to a}{Lim} f(x)$ عددی حقیقی و $\underset{x \to a}{Lim} f(x) \neq f(a)$، ناپیوستگی را **رفع‌شدنی** نامیم.

ب) حد چپ و حد راست اعدادی حقیقی ولی نابرابر باشند، ناپیوستگی را **جهشی** نامیم.

ج) حد چپ یا راست نامتناهی شود، ناپیوستگی را **نامتناهی** نامیم.

نکته: با توجه به تعریف فوق ناپیوستگی‌ها را به صورت زیر می‌توان دسته‌بندی کرد[1]:

- ناپیوستگی
  - ناپیوستگی رفع شدنی (برداشتنی)
  - ناپیوستگی رفع نشدنی (اساسی)
    - ناپیوستگی جهشی
    - ناپیوستگی نامتناهی

مثال ۷: ناپیوستگی توابع مثال‌های ۱ تا ۶ در نقطه $x = ۱$ به صورت زیر است: مثال‌های ۱ و ۲ رفع شدنی، مثال‌های ۳ و ۴ جهشی و مثال‌های ۵ و ۶ نامتناهی.

مثال ۸: پیوستگی تابع $f(x) = [x](x-۱)$ را در نقطه $x = ۱$ بررسی کنید.

حل:

$$۱)\ f(۱) = [۱](۱-۱) = ۰$$

$$۲)\ \left.\begin{array}{l} \underset{x\to ۱^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to ۱^+}{Lim}(۱)(x-۱) = ۰ \\ \underset{x\to ۱^-}{Lim} f(x) = \underset{x\to ۱^-}{Lim}(۰)(x-۱) = ۰ \end{array}\right\} \to \underset{x\to ۱}{Lim} f(x) = ۰$$

$$۳)\ \underset{x\to ۱}{Lim} f(x) = f(۱) = ۰$$

بنابراین سه شرط پیوستگی برقرار است و لذا تابع $f(x)$ در $x = ۱$ پیوسته می‌باشد.

مثال ۹: مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} ax^۲ + ۲bx & x < ۲ \\ ۳ & x = ۲ \\ -۲ax - ۳b & x > ۲ \end{cases}$$

در $x = ۲$ پیوسته باشد.

حل: برای اینکه تابع $f(x)$ در $x = ۲$ پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$\underset{x\to ۲^-}{Lim} f(x) = f(۲) = \underset{x\to ۲^+}{Lim} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\to ۲^-}{Lim}\ f(x) = \underset{x\to ۲^-}{Lim}\ (ax^۲ + ۲bx) = ۴a + ۴b \\ f(۲) = ۳ \\ \underset{x\to ۲^+}{Lim}\ f(x) = \underset{x\to ۲^+}{Lim}(-۲ax - ۳b) = -۴a - ۳b \end{array}\right\} \to \begin{cases} ۴a + ۴b = ۳ \\ -۴a - ۳b = ۳ \end{cases}$$

پس از حل دستگاه اخیر مقادیر $b = ۶$ و $a = -۵/۲۵$ حاصل می‌شود.

۱- به این نوع دسته‌بندی در بحث انتگرال‌های غیر عادی (بخش ۶-۳) نیاز داریم.

مثال ۱۰: مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = ۲$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^۲ + ۲bx - ۲ & x \le ۲ \\ -۲ax - ۳b & x > ۲ \end{cases}$$

حل: برای اینکه تابع $f(x)$ در $x = ۲$ پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$\underset{x\to ۲^-}{Lim} f(x) = f(۲) = \underset{x\to ۲^+}{Lim} f(x) \to \cdots \to ۴a + ۴b - ۲ = -۴a - ۳b$$

پس از ساده کردن عبارت فوق داریم: $۸a + ۷b = ۲$، یعنی تعداد نامتناهی زوج (a, b) می‌توان معرفی کرد که به ازای آن دو مقدار، تابع در $x = ۲$ پیوسته باشد.

قضیه ۲: هرگاه f و g دو تابع پیوسته در a باشند، آنگاه:

الف) $f + g$ در a پیوسته است. ب) $f - g$ در a پیوسته است.

ج) $f \cdot g$ در a پیوسته است. د) $\frac{f}{g}$ در a پیوسته است، مشروط بر اینکه $g(a) \neq ۰$.

قضیه ۳: الف) یک تابع چندجمله‌ای، در هر نقطه‌ای پیوسته است.

ب) هر تابع گویا در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است[1].

ج) توابع $f(x) = sin\,x$ و $g(x) = cos\,x$ در هر نقطه‌ای از $\mathbb{R}$ پیوسته می‌باشند.

د) تابع $f(x) = \sqrt[n]{x}$ برای nهای طبیعی زوج در هر نقطه فاصله $(۰, +\infty)$ و برای nهای طبیعی فرد غیر یک، در هر نقطه $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ه) با فرض $a > ۰$ و $a \neq ۱$ تابع $f(x) = a^x$ در هر نقطه $\mathbb{R}$ و تابع $g(x) = Log_a\,x$ در هر نقطه $(۰, +\infty)$ پیوسته است.

و) اگر تابع g در a و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشند، آنگاه تابع مرکب fog در a پیوسته است.

۱- هر تابع کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد **تابع گویا** و هر تابع کسری که صورت و مخرج آن نسبت‌های مثلثاتی باشد **تابع گویای مثلثاتی** نامیده می‌شود. از این دو تعریف در فصل پنجم نیز استفاده می‌شود.

مثال ۱۱: الف) $f(x) = ۲x^۲ - ۳x + ۱$ یک تابع چندجمله‌ای می‌باشد، پس بنابر قضیه ۳ در همه نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ب) $f(x) = \frac{x-۱}{x^۲-۴}$ یک تابع گویا می‌باشد، پس بنابر قضیه ۳ به جز در $x = ۲$ و $x = -۲$ در بقیه نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ج) تابع $f(x) = \sin x + ۲\cos x$ بنابر قضیه۲ و۳ در هر نقطه‌ای از $\mathbb{R}$ پیوسته است.

د) تابع $f(x) = \sqrt{\sin x}$ در $x = \frac{\pi}{۲}$ پیوسته است زیرا تابع $g(x) = \sin x$ در $x = \frac{\pi}{۲}$ پیوسته است و تابع $h(x) = \sqrt{x}$ در $x = g(\frac{\pi}{۲}) = ۱$ پیوسته است؛ لذا بنابر قضیه۳ تابع $f(x) = hog(x) = \sqrt{\sin x}$ در $x = \frac{\pi}{۲}$ پیوسته است.

تعریف ۵: الف) تابع f را در فاصله (a,b) پیوسته می‌گویند، هرگاه در تمام نقاط این فاصله پیوسته باشد.

ب) تابع f را در فاصله $[a,b)$ پیوسته می‌گویند، هرگاه در فاصله (a,b) پیوسته و در $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد.

ج) تابع f را در فاصله $(a,b]$ پیوسته می‌گویند، هرگاه در فاصله (a,b) پیوسته و در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

د) تابع f را در فاصله $[a,b]$ پیوسته می‌گویند، هرگاه در فاصله (a,b) پیوسته و در $x = a$ پیوستگی راست و در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

نکته: تعبیر هندسی پیوستگی تابع در یک فاصله، این است که نمودار آن در هیچ‌جا قطع نشده باشد و بتوان نمودار آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ، رسم کرد.

مثال ۱۲: بزرگترین فاصله‌های پیوستگی چند تابع، در زیر مشخص شده است.

الف) تابع $f(x) = [x]$ در هر فاصله $[n, n+۱)$ که $n \in \mathbb{Z}$، پیوسته است.

ب) تابع $f(x) = sgn(x-۱)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته نمی‌باشد زیرا در $x = ۱$ ناپیوسته است، ولی این تابع درفاصله‌های $(۱, +\infty)$ و $(-\infty, ۱)$ پیوسته است.

ج) تابع گویای $f(x) = \frac{۳x-۱}{۴-x^۲}$ در نقاط $x = ۲$ و $x = -۲$ ناپیوسته است، بنابراین تابع f در فاصله‌های $(۲, +\infty)$، $(-۲, ۲)$ و $(-\infty, -۲)$ پیوسته است.

د) تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۴}$ با توجه به دامنه‌اش که مجموعه $\mathbb{R} - (-۲, ۲)$ می‌باشد در فاصله‌های $[۲, +\infty)$ و $(-\infty, -۲]$ پیوسته می‌باشد.

ه) تابع گویای مثلثاتی $f(x) = \frac{\sin x}{x^۲+۱}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است، زیرا صورت و مخرج کسر توابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ می‌باشند و مخرج آن در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود.

و) تابع $f(x) = \frac{۱}{(\ln x) - ۱}$ با توجه به دامنه‌اش که مجموعه $(۰, +\infty) - \{e\}$ می‌باشد، در فاصله‌های $(e, +\infty)$ و $(۰, e)$ پیوسته است.

مثال ۱۳ : مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ae^{x+۱} + x & x \leq -۱ \\ ۲x - ۳x^۳ & -۱ < x \leq ۰ \\ ۲^{x+۲} - b & ۰ < x \end{cases}$$

حل: هر یک از ضابطه‌های f به تنهایی بر $\mathbb{R}$ پیوسته است، بنابراین برای پیوستگی f بر $\mathbb{R}$ باید تابع در نقاط $x = ۰$ و $x = -۱$ پیوسته باشد؛ یعنی:

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = \lim_{x \to ۰^+} f(x) = f(۰)$$

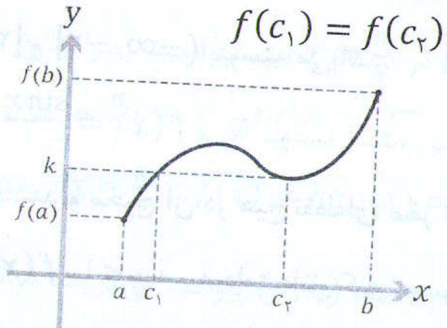
$$\lim_{x \to ۰^-} (۲x - ۳x^۳) = \lim_{x \to ۰^+} (۲^{x+۲} - b) = ۰ \to ۰ = ۴ - b = ۰ \to b = ۴$$

$$\lim_{x \to -۱^-} f(x) = \lim_{x \to -۱^+} f(x) = f(-۱)$$

$$\lim_{x \to -۱^-} (ae^{x+۱} + x) = \lim_{x \to -۱^+} (۲x - ۳x^۳) = a - ۱ \to a - ۱ = ۱ = a - ۱ \to a = ۲$$

قضیه ۴ (قضیه مقدار میانی): اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، در این صورت حداقل یک نقطه مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد به‌طوری که: $f(c)=k$.

تذکر: نمودار زیر مفهوم قضیه مقدارمیانی را بهتر به ذهن می‌سپارد. در این شکل تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته می‌باشد و برای عدد k، دو مقدار $c_۱$ و $c_۲$ وجود دارد به‌طوری که داریم: $f(c_۱)=f(c_۲)=k$



نکته: یافتن ریشه‌های یک معادله در حالت کلی کار دشواری است. به کمک نتیجه زیر که از قضیه مقدار میانی به‌دست می‌آید، می‌توان مکان ریشه‌های معادله را دقیق‌تر مشخص کرد.

نتیجه: اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند، آنگاه حداقل یک نقطه مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=۰$.

مثال ۱۴: نشان دهید معادله $x^۳+x-۱=۰$ دارای ریشه‌ای در فاصله $(۰,۱)$ می‌باشد.

حل: اگر فرض کنیم: $f(x)=x^۳+x-۱$، این تابع چندجمله‌ای در همه $\mathbb{R}$ از جمله در فاصله $[۰,۱]$ پیوسته است. همچنین در مورد این تابع داریم: $f(۰)=-۱$ و $f(۱)=۱$. پس شرایط نتیجه قبل فراهم است و لذا عددی مانند $c \in (۰,۱)$ موجود است به‌طوری که $f(c)=۰$. یعنی معادله $x^۳+x-۱=۰$ حداقل یک ریشه در فاصله $(۰,۱)$ دارد.

تمرین

۱- پیوستگی راست، پیوستگی چپ و پیوستگی توابع زیر را در نقطه $x_۰$ بررسی کنید.

۱) $f(x)=\frac{x+۲}{x^۲+۱}\quad , x_۰=-۱$　　۲) $f(x)=\sqrt[۳]{x+x^۲}\quad , x_۰=-۱$

۳) $f(x)=x-[x]\quad , x_۰=۲$　　۴) $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}\quad , x_۰=۱$

۵) $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\cos x & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}\quad , x_۰=۰$

۶) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲+۲x-۳}{x-۱} & x\neq ۱\\ ۵ & x=۱\end{cases}\quad , x_۰=۱$

۷) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin ۲x}{|\cos x|} & x\neq ۰\\ ۲ & x=۰\end{cases}\quad , x_۰=۰$

۸) $f(x)=\begin{cases}\frac{x+۱}{x-۱} & x>۳\\ ۲ & x=۳\\ ۵x-۱۳ & x<۳\end{cases}\quad , x_۰=۳$

۲- مقدار تابع f را در نقطه $x_۰$ چنان تعریف کنید که تابع در این نقطه پیوسته باشد.

۱) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq ۰\\ ? & x=۰\end{cases}\quad x_۰=۰$　　۲) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x} & x\neq ۰\\ ? & x=۰\end{cases}\quad x_۰=۰$

۳) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۴}{x^۲-۵x+۶} & x\neq ۲\\ ? & x=۲\end{cases}\quad x_۰=۲$　　۴) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴} & x\neq ۴\\ ? & x=۴\end{cases}\quad x_۰=۴$

۳- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع f در نقطه $x_۰$ پیوسته باشد.

۱) $f(x)=\begin{cases}۲ax+b & x>-۲\\ ۵ & x=-۲\\ bx^۲+۲x & x<-۲\end{cases}\quad , x_۰=-۲$

۲) $f(x)=\begin{cases}ax^۲+bx-۱ & x\geq ۱\\ ۲ax-۳b & x<۱\end{cases}\quad , x_۰=۱$

۴- برای توابع زیر، بزرگترین فاصله‌هایی را مشخص کنید که تابع بر آن‌ها پیوسته باشد.

۱) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-x+1}$ ۲) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

۳) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ ۴) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$

۵- مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

۱) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-ax+2}$ ۲) $f(x) = \sqrt{x^2+b}$

۳) $f(x) = \begin{cases} x+2a & x \leq -2 \\ 3ax+b & -2 < x < 1 \\ 3x-2b & 1 \leq x \end{cases}$ ۴) $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & |x| < 2 \\ |x-1| & |x| \geq 2 \end{cases}$

۶- الف) دو تابع مثال بزنید که در $x = 1$ ناپیوسته می‌باشند ولی مجموع آنها در $x = 1$ پیوسته است.

ب) دو تابع مثال بزنید که در $x = 1$ ناپیوسته می‌باشند ولی ضرب آنها در $x = 1$ پیوسته است.

۷- الف) با ذکر دلیل نشان دهید که معادله $x^3 - x - 1 = 0$ دارای ریشه‌ای در فاصله $(1,2)$ می‌باشد.

ب) با ذکر دلیل نشان دهید که معادله $x = \sin x + \frac{\pi}{2}$ دارای ریشه‌ای در فاصله $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ می‌باشد.

فصل سوم

مشتق

۳- ۱ تعریف مشتق

یکی دیگر از مفاهیم بنیادی و مهم ریاضیات مشتق می‌باشد که در مسائل کاربردی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این فصل تعریف مشتق و قضیه‌های مربوط به آن را ارائه می‌کنیم و درفصل بعد به کاربردهای مشتق خواهیم پرداخت.

تعریف ۱: فرض کنید f یک تابع و $a \in D_f$ ، اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد، می‌گوییم تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر است و مقدار این حد را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را مشتق تابع f در نقطه a می‌نامیم.

تذکر: عبارت‌های زیر معادل‌های دیگری برای تعریف مشتق تابع f در نقطه a می‌باشند.

۱) $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

۲) $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

از عبارت شماره یک در محاسبه قوانین مشتق و از عبارت شماره دو در فصل کاربرد مشتق استفاده خواهیم کرد.

مثال ۱: مشتق تابع $f(x) = x^۲$ را در نقطه $x = ۳$، در صورت وجود به‌دست آورید.

حل:

$$\underset{x\to ۳}{Lim}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = \underset{x\to ۳}{Lim}\frac{x^۲-۹}{x-۳} = \frac{۰}{۰} \quad (\text{مبهم})$$

$$\underset{x\to ۳}{Lim}\frac{x^۲-۹}{x-۳} = \underset{x\to ۳}{Lim}\frac{(x-۳)(x+۳)}{(x-۳)} = \underset{x\to ۳}{Lim}(x+۳) = ۶ \rightarrow f'(۳) = ۶$$

مثال ۲: مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x = ۴$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

حل:

$$\underset{x\to ۴}{Lim}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴} = \underset{x\to ۴}{Lim}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴} = \frac{۰}{۰} \quad (\text{مبهم})$$

$$\underset{x\to ۴}{Lim}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴} = \underset{x\to ۴}{Lim}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}\times\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲} = \underset{x\to ۴}{Lim}\frac{x-۴}{(x-۴)(\sqrt{x}+۲)}$$

$$= \underset{x\to ۴}{Lim}\frac{۱}{\sqrt{x}+۲} = \frac{۱}{۴} \rightarrow f'(۴) = \frac{۱}{۴}$$

مثال ۳: مشتق تابع $f(x) = \frac{۲x}{x-۱}$ را در نقطه $x = ۱$ در صورت وجود به‌دست آورید.

حل: چون $۱ \notin D_f$ ، بنابر تعریف مشتق، این تابع در نقطه $x = ۱$ مشتق ندارد.

مثال ۴: مشتق تابع $f(x) = |x|$ را در نقطه $x = ۰$ در صورت وجود به‌دست آورید.

حل:

$$\underset{x\to ۰}{Lim}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \underset{x\to ۰}{Lim}\frac{|x|-۰}{x-۰} = \underset{x\to ۰}{Lim}\frac{|x|}{x} = ?$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \underset{x\to ۰^+}{Lim}\frac{|x|}{x} = \underset{x\to ۰^+}{Lim}\frac{x}{x} = \underset{x\to ۰^+}{Lim}\,۱ = ۱ \\ L' &= \underset{x\to ۰^-}{Lim}\frac{|x|}{x} = \underset{x\to ۰^-}{Lim}\frac{-x}{x} = \underset{x\to ۰^-}{Lim}(-۱) = -۱ \end{aligned}\right\} \rightarrow L \neq L'$$

بنابراین حد موجود نیست و لذا تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۰$ مشتق ندارد.

تعریف ۲: هرگاه f یک تابع و $a \in D_f$ ، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x = a$ به صورت زیر تعریف و نمایش داده می‌شود.

$$f'_-(a) = \underset{x\to a^-}{Lim}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (\text{مشتق چپ})$$

$$f'_+(a) = \underset{x\to a^+}{Lim}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (\text{مشتق راست})$$

نتیجه: با توجه به قضیه‌های فصل حد و تعریف مشتق، $f'(a)$ موجود است اگر و تنها اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و برابر باشند.

مثال ۵: برای تابع $f(x) = |x|$ با توجه به محاسبات مثال ۴ داریم:

$f'_+(۰) = ۱$ ، $f'_-(۰) = -۱$ و چون $f'_-(۰) \neq f'_+(۰)$ پس $f'(۰)$ موجود نیست.

قضیه: اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته نیز است.

نتیجه: اگر تابع در نقطه‌ای ناپیوسته باشد، آنگاه در این نقطه مشتق‌پذیر نیست[1]. بنابراین برای بررسی مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه، بهتر است ابتدا پیوستگی تابع را بررسی کنیم؛ زیرا اگر تابع پیوسته نباشد نیازی به عملیات بیشتر نمی‌باشد.

مثال ۶: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = [x]$ را در نقطه $x = ۲$ بررسی کنید.

حل: چون این تابع در نقطه $x = ۲$ ناپیوسته است پس در این نقطه مشتق هم ندارد.

مثال ۷: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - x & x \geq ۱ \\ ۴x - ۲ & x < ۱ \end{cases}$ را در نقطه $x = ۱$ بررسی کنید.

حل: ابتدا پیوستگی تابع f در نقطه $x = ۱$ را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(۱) = ۱ \ , \ \underset{x\to ۱^+}{Lim}f(x) = \underset{x\to ۱^+}{Lim}(۲x^۲ - x) = ۱ \ , \ \underset{x\to ۱^-}{Lim}f(x) = \underset{x\to ۱^-}{Lim}(۴x - ۲) = ۲$$

با توجه به تعریف پیوستگی، تابع در نقطه $x = ۱$ پیوسته نیست. بنابراین تابع در نقطه $x = ۱$ مشتق ندارد.

مثال ۸: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۲ & x \geq ۱ \\ ۲x + ۱ & x < ۱ \end{cases}$ را در نقطه $x = ۱$ بررسی کنید.

حل: ابتدا پیوستگی تابع f در نقطه $x = ۱$ را بررسی می‌کنیم. داریم:

۱- این نتیجه به استناد مطلب زیر حاصل شده است.

هرگاه p یک گزاره باشد، گزاره «چنین نیست که p» را نقیض p می‌گوییم و با علامت $\sim p$ نشان می‌دهیم. در ریاضی، دو گزاره «اگر p آنگاه q» و «اگر $\sim q$ آنگاه $\sim p$» هم ارزش می‌باشند.

از این مطلب در فصل یکم، هنگام ارائه تعریف معادلی برای تعریف تابع یک به یک نیز استفاده کردیم.

$$f(1)=3,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+2)=3,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x+1)=3$$

با توجه به تعریف پیوستگی، تابع در نقطه $x=1$ پیوسته است. اکنون می‌توان مشتق‌پذیری تابع f در این نقطه را بررسی کرد.

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2+2)-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(2x+1)-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

چون $f'_+(1)=f'_-(1)=2$ بنابراین تابع f در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر است و داریم: $f'(1)=2$

مثال ۹: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}ax+b & x<2\\ x^2 & x\ge 2\end{cases}$ در نقطه $x=2$ مشتق‌پذیر باشد.

حل: شرط اول برای اینکه تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد این است که تابع در این نقطه پیوسته باشد، یعنی داشته باشیم: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

$$\left.\begin{aligned}&f(2)=4\\ &\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^2=4\\ &\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax+b)=2a+b\end{aligned}\right\}\to 2a+b=4\quad (*)$$

شرط دوم برای اینکه تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد این است که مشتق چپ و راست f در این نقطه برابر باشد، یعنی داشته باشیم: $f'_-(2)=f'_+(2)$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=4$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(ax+b)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(ax+b)-(2a+b)}{x-2}\ \text{(بنابر *)}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{a(x-2)}{x-2}=a\quad,\quad f'_-(2)=f'_+(2)\to a=4$$

و از عبارات $2a+b=4$ و $a=4$ نتیجه می‌شود: $b=-4$

تمرین

۱- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را در نقطه داده شده به‌دست آورید.

۱) $f(x)=5\ ,\ x=2$ ۲) $f(x)=3x+2\ ,\ x=1$

۳) $f(x)=x^2-2x\ ,\ x=3$ ۴) $f(x)=x^3-2\ ,\ x=-2$

۵) $f(x)=\sqrt{2x+1}\ ,\ x=4$ ۶) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}\ ,\ x=0$

۷) $f(t)=\sin t\ ,\ t=0$ ۸) $f(t)=\cos t\ ,\ t=\frac{\pi}{2}$

۲- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.

۱) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\le 2\\ 4x-3 & x>2\end{cases}\ ,\ x=2$

۲) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\ge 0\\ 1-x^2 & x<0\end{cases}\ ,\ x=0$

۳) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\ge 1\\ 2-x & x<1\end{cases}\ ,\ x=1$

۴) $f(x)=\begin{cases}3-2x & x\ge 1\\ 2-x & x<1\end{cases}\ ,\ x=1$

۵) $f(x)=\sqrt{x^2(x+2)}\ ,\ x=0$ ۶) $f(x)=(x-1)[x]\ ,\ x=1$

۷) $f(x)=\sqrt{|x|}\ ,\ x=0$ ۸) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\ ,\ x=0$

۳- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که هر یک از توابع زیر در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر باشد.

۱) $f(x)=\begin{cases}ax+b & x<1\\ x^2+1 & x\ge 1\end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases}x^3+x & x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x+a & x\le 1\\ bx+2 & x>1\end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases}ax^2+1 & x\le 1\\ bx-8 & x>1\end{cases}$

۲-۳ قوانین مشتق‌گیری

محاسبه مشتق تابع f در نقاط مختلف به کمک تعریف اغلب طولانی و مشکل است، لذا به دنبال یافتن قانون‌هایی هستیم که به کمک آنها مشتق یک تابع را در هر نقطه‌ای سریع محاسبه کنیم. مثال‌های زیر روش یافتن چنین قانون‌هایی را توضیح می‌دهد.

مثال ۱: تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید، می‌خواهیم مشتق تابع را در یک نقطه دلخواه به‌دست آوریم، به طور موقت x را مقداری ثابت فرض کرده و برای محاسبه مشتق تابع f در نقطه x از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{0}{0} \quad (\text{مبهم})$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

بنابراین برای تابع $f(x) = x^2$ همواره داریم: $f'(x) = 2x$

به عنوان نمونه مشتق تابع f در نقطه‌های $x = 0$ ، $x = 2$ و $x = -1$ عبارت است از:

$$f'(0) = 0 \quad , \quad f'(2) = 4 \quad , \quad f'(-1) = -2$$

مثال ۲: قانونی برای محاسبه مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ به‌دست آورید.

حل: فرض کنیم x نقطه دلخواهی از دامنه f باشد، داریم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{0}{0} \quad (\text{مبهم})$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال ۳: قانونی برای محاسبه مشتق از تابع $f(x) = \sin x$ به‌دست آورید.

حل:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{0}{0} \quad (\text{مبهم})$$

برای رفع ابهام از فرمول $\sin a - \sin b = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$ استفاده می‌کنیم.

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(\frac{x+h+x}{2})\sin(\frac{x+h-x}{2})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\cos(x+\frac{h}{2})\frac{\sin(\frac{h}{2})}{h} = 2\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{h}$$

$$= (2\cos x)(\tfrac{1}{2}) = \cos x \to f'(x) = \cos x$$

تذکر: در مثال‌های فوق مشاهده می‌کنید که به ازای هر تابع، تابع دیگری حاصل می‌شود. به این تابع جدید، تابع مشتق می‌گویند. یافتن تابع مشتق به کمک تعریف حتی برای توابع ساده نیاز به عملیات زیادی دارد. ریاضی‌دانان با اثبات تعدادی قضیه، قانون‌هایی را ارائه کرده‌اند که به کمک آنها تابع مشتق را به سادگی می‌توان محاسبه کرد. در این کتاب به غیر از چند مورد بقیه قوانین را بدون اثبات بیان و مورد استفاده قرار می‌دهیم. برای اختصار، هر چند قانون را در قالب یک قضیه بیان کرده‌ایم.

قضیه ۱: فرض کنید c و n مقادیر حقیقی و ثابت و توابع g و h در نقطه x مشتق‌پذیر باشند، آنگاه داریم:

۱) $f(x) = c \to f'(x) = 0$

۲) $f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}$

۳) $f(x) = cg(x) \to f'(x) = cg'(x)$

۴) $f(x) = g(x) \pm h(x) \to f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

۵) $f(x) = g(x)h(x) \to f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$

۶) $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \to f'(x) = \frac{g'(x)h(x)-h'(x)g(x)}{h^2(x)} \quad (h(x) \neq 0)$

مثال ۴: مشتق توابع زیر به کمک قضیه ۱ محاسبه شده است.

۱) $f(x) = 5 \to f'(x) = 0$

۲) $f(x) = x^2 \to f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$

۳) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \to f'(x) = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

۴) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \to f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۵) $f(x) = 5x^3 \to f'(x) = 5(x^3)' = 5(3x^2) = 15x^2$

۶) $f(x) = \sqrt{x} + x^2 \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$

۷) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x \to f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$

۸) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(x^2 + 3x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 3x) + (\sqrt{x} + 1)(2x + 3)$$

۹) $f(x) = \frac{2x+1}{5x-3} \to f'(x) = \frac{2(5x-3)-5(2x+1)}{(5x-3)^2} = \frac{-11}{(5x-3)^2}$

قضیه ۲: با فرض اینکه x برحسب رادیان است، مشتق توابع مثلثاتی ساده به صورت زیر می‌باشد[1].

۱) $f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x$

۲) $f(x) = \cos x \to f'(x) = -\sin x$

۳) $f(x) = \tan x \to f'(x) = 1 + \tan^2 x$

۴) $f(x) = \cot x \to f'(x) = -(1 + \cot^2 x)$

۵) $f(x) = \sec x \to f'(x) = \sec x \tan x$

۶) $f(x) = \csc x \to f'(x) = -\csc x \cot x$

مثال ۵: اثبات قوانین شماره ۳ و ۵ قضیه ۲ به کمک سایر قوانین به صورت زیر است:

۱) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \to f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{(\cos x)^2}$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

۱- علت اینکه x باید برحسب رادیان باشد این است که به عنوان نمونه در محاسبه مشتق تابع $f(x) = \sin x$ داریم: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{(x+h)-x}$. در تابع $y = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{(x+h)-x}$ صورت کسر، عددی حقیقی برحسب واحد طول است، لذا مخرج هم یعنی x و $x+h$ باید اعداد حقیقی برحسب واحد طول باشند. می‌دانیم رادیان واحدی برای اندازه‌گیری زاویه برحسب طول است، پس x و $x+h$ را برحسب رادیان در نظر می‌گیریم.

۲) $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{(0)(\cos x)-(1)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

مثال ۶: مشتق توابع زیر به کمک قوانین مشتق محاسبه شده است.

۱) $f(x) = 5\sin x + 3\cos x \to f'(x) = 5\cos x - 3\sin x$

۲) $f(x) = x^2 \sec x \to f'(x) = 2x \sec x + x^2 \sec x \tan x$

۳) $f(x) = \sin x \tan x$

$$f'(x) = \cos x \tan x + \sin x\,(1 + \tan^2 x) = \sin x\,(2 + \tan^2 x)$$

۴) $f(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x} \to f'(x) = \frac{(-\sin x)(1-\sin x)-\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

$$f'(x) = \frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$$

قضیه ۳: مشتق توابع معکوس مثلثاتی به صورت زیر می‌باشد[1].

۱) $f(x) = \sin^{-1} x = Arc\sin x \to f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

۲) $f(x) = \cos^{-1} x = Arc\cos x \to f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

۳) $f(x) = \tan^{-1} x = Arc\tan x \to f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

۴) $f(x) = \cot^{-1} x = Arc\cot x \to f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

۵) $f(x) = \sec^{-1} x = Arc\sec x \to f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

۶) $f(x) = \csc^{-1} x = Arc\csc x \to f'(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

تذکر: اثبات بعضی از قوانین فوق را به کمک مشتق‌گیری ضمنی، در بخش بعد (بخش ۳-۳) مشاهده خواهید کرد.

۱- ممکن است برای مشتق دو تابع $\sec^{-1} x$ و $\csc^{-1} x$ در کتاب‌های دیگر فرمول‌هایی بدون قدرمطلق مشاهده کنید. علت این می‌باشد که در محدود کردن دامنه دو تابع سکانت و کسکانت برای اینکه معکوس داشته باشند نظر یکسانی وجود ندارد. به عنوان نمونه اگر برای $\sec x$ دامنه را مجموعه $[0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi]$ انتخاب کنیم در فرمول مشتق $\sec^{-1} x$، قدرمطلق ظاهر می‌شود. این انتخاب از جهت محاسبه مقادیری مانند $\sec^{-1}(-5)$ با ماشین حساب‌های علمی، راحت‌تر می‌باشد. در این مورد داریم: $\sec^{-1}(-5) = \cos^{-1}(\frac{-1}{5})$

مثال ۷: مشتق توابع زیر به کمک قضیه‌های قبل محاسبه شده است.

۱) $f(x) = ۴\sin^{-۱} x + ۳\cos^{-۱} x \rightarrow f'(x) = \frac{۴}{\sqrt{۱-x^۲}} - \frac{۳}{\sqrt{۱-x^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$

۲) $f(x) = \tan^{-۱} x + \cot^{-۱} x \rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۱+x^۲} + \frac{-۱}{۱+x^۲} = ۰$

۳) $f(x) = x^۲ \sin^{-۱} x \rightarrow f'(x) = ۲x \sin^{-۱} x + x^۲(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}})$

قضیه ۴: مشتق توابع نمایی و لگاریتمی به صورت زیر می‌باشد. ($a > ۰$ و $a \neq ۱$)

۱) $f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = (Ln\, a)a^x$

۲) $f(x) = Log_a x \rightarrow f'(x) = \frac{۱}{(Ln\, a)x} \quad (x > ۰)$

چون $Ln\, e = ۱$ ، پس برای $a = e$ فرمول‌های فوق به صورت زیر می‌باشد.

۳) $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

۴) $f(x) = Ln\, x \rightarrow f'(x) = \frac{۱}{x} \quad (x > ۰)$

مثال ۸: مشتق توابع زیر به کمک قضیه‌های قبل محاسبه شده است.

۱) $f(x) = e^x \sin x$

$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

۲) $f(x) = e^{-x} = \frac{۱}{e^x} \rightarrow f'(x) = \frac{(۰)e^x - (۱)e^x}{(e^x)^۲} = \frac{-e^x}{e^{۲x}} = -e^{-x}$

۳) $f(x) = \frac{۳^x}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{(Ln\,۳)۳^x\, x - ۳^x}{x^۲} = \frac{۳^x(x(Ln\,۳) - ۱)}{x^۲}$

۴) $f(x) = x\, Log_۲\, x$

$f'(x) = (۱)\, Log_۲\, x + (x)\frac{۱}{(Ln\,۲)x} = \frac{Ln\, x}{Ln\,۲} + \frac{۱}{Ln\,۲} = \frac{(Ln\, x) + ۱}{Ln\,۲} = \frac{۱ + Ln\, x}{Ln\,۲}$

تذکر: مشتق تابع $f(x) = e^{-x}$ در صفحات بعد به کمک قضیه مشتق تابع مرکب راحت‌تر محاسبه می‌شود. ولی قبل از بیان آن قضیه، به مشتق این تابع در مثال ۹ صفحه بعد نیاز داریم.

قضیه ۵: مشتق توابع هیپربولیک به صورت زیر می‌باشد (این قوانین تشابه زیادی با قوانین مشتق توابع مثلثاتی دارد).

۱) $f(x) = \sinh x \rightarrow f'(x) = \cosh x$

۲) $f(x) = \cosh x \rightarrow f'(x) = \sinh x$

۳) $f(x) = \tanh x \rightarrow f'(x) = ۱ - \tanh^۲ x$

۴) $f(x) = \coth x \rightarrow f'(x) = ۱ - \coth^۲ x$

مثال ۹: اثبات دو مورد از قوانین فوق به کمک سایر قوانین به صورت زیر است.

۱) $f(x) = \sinh x = \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x})$

$f'(x) = \frac{۱}{۲}[(e^x)' - (e^{-x})'] = \frac{۱}{۲}(e^x - (-e^{-x}))$ (بنابر مثال ۸ قسمت ۲)

$= \frac{۱}{۲}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$

۲) $f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \rightarrow f'(x) = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{(\cosh x)^۲}$

$f'(x) = \frac{\cosh^۲ x - \sinh^۲ x}{(\cosh x)^۲} = \frac{۱}{(\cosh x)^۲} = ۱ - \tanh^۲ x$

تذکر: مشتق تابع $y = f(x)$ را غیر از نمادهای $f'(x)$ و y' با نمادهای دیگری مانند $\frac{dy}{dx}$ یا $\frac{df(x)}{dx}$ نیز نمایش می‌دهند. این نمادهای جدید در محاسبه و نمایش مشتق تابع مرکب بسیار مفید می‌باشند.

قضیه ۶ (قضیه مشتق تابع مرکب یا قاعده زنجیره‌ای): هرگاه f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند، مشتق تابع مرکب fog نسبت به x ، با فرض $u = g(x)$ و $y = fog(x) = f(u)$ به صورت مقابل محاسبه می‌شود.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du}\,\frac{du}{dx}}$$

نکته ۱: مشتق تابع مرکب fog را به صورت‌های زیر نیز نمایش می‌دهند.

$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x)\, f'(g(x))$

$y = f(u) \rightarrow y' = u'\, f'(u)$

نکته ۲: قضیه مشتق تابع مرکب را از این جهت **قاعده زنجیره‌ای** یا **قاعده زنجیری** می‌گویند که با اضافه کردن حلقه‌ای دیگر، زنجیری بلندتر ساخته می‌شود. تصور کنید $y = f(u)$, $u = g(x)$ و $x = h(t)$ که در آن f ، g و h توابعی مشتق‌پذیرند، آنگاه برای محاسبه مشتق y نسبت به t بنابر قانون مشتق تابع مرکب داریم:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

مثال ۱۰: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^۲ + ۵x$ مشتق تابع $fog(x)$ را بیابید.

حل:

$$y = fog(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{u} = f(u) \quad \Big| \quad u = x^۲ + ۵x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx} = \frac{۱}{۲\sqrt{u}}(۲x + ۵) = \frac{۲x+۵}{۲\sqrt{x^۲+۵x}} \quad \Big| \quad \frac{du}{dx} = ۲x + ۵$$

مثال ۱۱: اگر $f(x) = x^۳$ مشتق تابع $y = f(\sin x)$ را به‌دست آورید.

حل:

$$y = f(\sin x) = (\sin x)^۳ = u^۳ = f(u) \quad \Big| \quad u = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx} = ۳u^۲ \cos x = ۳\sin^۲ x \cos x \quad \Big| \quad \frac{du}{dx} = \cos x$$

مثال ۱۲: اگر $f'(x) = \frac{۱}{x}$ مشتق تابع $y = f(x^۲ + ۱)$ را به‌دست آورید.

حل:

$$y = f(x^۲ + ۱) = f(u) \quad \Big| \quad u = x^۲ + ۱$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx} = \frac{۱}{u}(۲x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۲x}{x^۲+۱} \quad \Big| \quad \frac{du}{dx} = ۲x$$

مثال ۱۳: مشتق تابع $y = \sin ۵x$ را به‌دست آورید.

حل: با فرض $f(x) = \sin x$ و $u = ۵x$ ، داریم:

$$y = \sin ۵x = \sin u = f(u) \quad \Big| \quad u = ۵x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx} = (\cos u)(۵) = ۵\cos ۵x \quad \Big| \quad \frac{du}{dx} = ۵$$

نتیجه: هرگاه u تابعی مشتق‌پذیر از x باشد، از قضیه مشتق تابع مرکب نتایج زیر حاصل می‌شود.

۱) $(u^n)' = nu'\,u^{n-۱} \quad (n \in \mathbb{R})$ ۲) $(\frac{۱}{u})' = \frac{-u'}{u^۲}$

۳) $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$ ۴) $(\sqrt[m]{u^n})' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}} \quad (m, n \in \mathbb{N}, m \neq ۱)$

۵) $(\sin u)' = u'\cos u$ ۶) $(\cos u)' = -u'\sin u$

۷) $(\tan u)' = u'(۱ + \tan^۲ u)$ ۸) $(\cot u)' = -u'(۱ + \cot^۲ u)$

۹) $(\sec u)' = u'\sec u \tan u$ ۱۰) $(\csc u)' = -u'\csc u \cot u$

۱۱) $(\sin^{-۱} u)' = \frac{u'}{\sqrt{۱-u^۲}}$ ۱۲) $(\cos^{-۱} u)' = \frac{-u'}{\sqrt{۱-u^۲}}$

۱۳) $(\tan^{-۱} u)' = \frac{u'}{۱+u^۲}$ ۱۴) $(\cot^{-۱} u)' = \frac{-u'}{۱+u^۲}$

۱۵) $(\sec^{-۱} u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^۲-۱}}$ ۱۶) $(\csc^{-۱} u)' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^۲-۱}}$

۱۷) $(e^u)' = u'e^u$ ۱۸) $(a^u)' = u'(Ln\, a)a^u$

۱۹) $(Ln\, u)' = \frac{u'}{u}$ ۲۰) $(Log_a u)' = \frac{u'}{(Ln\, a)u}$

۲۱) $(\sinh u)' = u'\cosh u$ ۲۲) $(\cosh u)' = u'\sinh u$

۲۳) $(\tanh u)' = u'(۱ - \tanh^۲ u)$ ۲۴) $(\coth u)' = u'(۱ - \coth^۲ u)$

تذکر ۱: فرمول‌های ۲ ، ۳ و ۴ از فرمول ۱ نتیجه می‌شوند. هم‌چنین فرمول ۱۷ حالت خاص فرمول ۱۸ و فرمول ۱۹ حالت خاص فرمول ۲۰ می‌باشد، ولی چون این فرمول‌ها در مسائل مختلف بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند، آنها را به صورت فرمول مستقل آورده‌ایم.

تذکر ۲: در فرمول‌های نتیجه قبل با فرض $u = x$ داریم: $u' = ۱$ و لذا همان فرمول‌های مشتق در قضیه‌های قبل حاصل می‌شود. مجموعه این قوانین را در پایان کتاب در قسمت پیوست‌ها هم آورده‌ایم.

مثال ۱۴: مشتق توابع زیر، به کمک قوانین محاسبه شده است.

۱) $y=(x^2+3x)^5 \rightarrow y=u^5$ | $u=x^2+3x$

$y'=5u'u^4=5(2x+3)(x^2+3x)^4$ | $u'=2x+3$

۲) $y=\sin\sqrt{x} \rightarrow y=\sin u$ | $u=\sqrt{x}$

$y'=u'\cos u=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$ | $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

۳) $y=\cos^3 x \rightarrow y=u^3$ | $u=\cos x$

$y'=3u'u^2=-3\sin x\cos^2 x$ | $u'=-\sin x$

۴) $y=\sqrt{x^2+1} \rightarrow y=\sqrt{u}$ | $u=x^2+1$

$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ | $u'=2x$

۵) $y=e^{\sin x} \rightarrow y=e^u$ | $u=\sin x$

$y'=u'e^u=\cos x\, e^{\sin x}$ | $u'=\cos x$

۶) $y=Ln(x^2-4) \rightarrow y=Ln\, u$ | $u=x^2-4$

$y'=\frac{u'}{u}=\frac{2x}{x^2-4}$ | $u'=2x$

۷) $y=Log_2(e^x+x) \rightarrow y=Log_2 u$ | $u=e^x+x$

$y'=\frac{u'}{(Ln\,2)u}=\frac{e^x+1}{(Ln\,2)(e^x+x)}$ | $u'=e^x+1$

۸) $y=\sin^{-1}(e^x+2x) \rightarrow y=\sin^{-1}u$ | $u=e^x+2x$

$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{e^x+2}{\sqrt{1-(e^x+2x)^2}}$ | $u'=e^x+2$

۹) $y=(\tan^{-1}x)^2 \rightarrow y=u^2$ | $u=\tan^{-1}x$

$y'=2u'u=2(\frac{1}{1+x^2})\tan^{-1}x=\frac{2\tan^{-1}x}{1+x^2}$ | $u'=\frac{1}{1+x^2}$

۱۰) $y=\cosh(\frac{1}{x}) \rightarrow y=\cosh u$ | $u=\frac{1}{x}$

$y'=u'\sinh u=-\frac{1}{x^2}\sinh(\frac{1}{x})$ | $u'=-\frac{1}{x^2}$

۱۱) $y=\sin^5(x^2+3) \rightarrow y=u^5$ | $u=\sin(x^2+3)=\sin v$ | $v=x^2+3$

$y'=5u'u^4$ | $u'=v'\cos v$ | $v'=2x$

$=5(2x\cos(x^2+3))(\sin(x^2+3))^4$ | $u'=2x\cos(x^2+3)$

$=10x\cos(x^2+3)\sin^4(x^2+3)$

۱۲) $y=Ln(e^{\sqrt{x}}+2) \rightarrow y=Ln\,u$ | $u=e^{\sqrt{x}}+2=e^v+2$ | $v=\sqrt{x}$

$y'=\frac{u'}{u}=\frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}+2}$ | $u'=v'e^v$ | $v'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}}+2)}$ | $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

۱۳) $y=(2x-1)^3(8x^2+3)^5$ | $u=2x-1$ | $u'=2$

$y=u^3v^5$ | $v=8x^2+3$ | $v'=16x$

$y'=(u^3)'v^5+u^3(v^5)'$

$=3u'u^2v^5+u^3(5v'v^4)$

$=3(2)(2x-1)^2(8x^2+3)^5+5(2x-1)^3(16x)(8x^2+3)^4$

$=(2x-1)^2(8x^2+3)^4[6(8x^2+3)+80x(2x-1)]$

$=(2x-1)^2(8x^2+3)^4(208x^2-80x+18)$

۱۴) $y=2^{x^2}3^{8x}$ | $u=x^2$ | $u'=2x$

$y=2^u3^v$ | $v=8x$ | $v'=8$

$y'=(2^u)'3^v+2^u(3^v)'$

$=(u'\,Ln\,2\;2^u)3^v+2^u(v'\,Ln\,3\;3^v)$

$=2^u3^v(u'\,Ln\,2+v'\,Ln\,3)$

$=2^{x^2}3^{8x}(2x\,Ln\,2+8\,Ln\,3)$

تمرین

۱- با استفاده از تعریف مشتق، تابع مشتق را برای توابع زیر بیابید.

۱) $f(x) = x^3 + 1$ ۲) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

۳) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ۴) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

۲- مشتق توابع زیر را به کمک قوانین مشتق به‌دست آورید.

۱) $f(x) = \frac{1}{4}x^8 - x^4$ ۲) $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

۳) $s(r) = \frac{1}{2}(\pi r^2 + 10\pi r)$ ۴) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{x^3}$

۵) $g(h) = \frac{2h-3}{h+2}$ ۶) $g(x) = \frac{x^2+2x-1}{3x+2}$

۷) $f(x) = (x^2 - 5x)(x^7 - 8x + 1)$ ۸) $f(x) = x^2 \cot x$

۹) $g(x) = 3\cos x - x\sin x$ ۱۰) $g(t) = t^3 \sec t$

۱۱) $h(z) = \frac{\sin z - 1}{\cos z + 1}$ ۱۲) $g(z) = \frac{2\sin z}{2+z}$

۱۳) $h(t) = t^3 Ln\, t$ ۱۴) $h(x) = e^x \cos x$

۱۵) $f(x) = (x^2 + x)(e^x + 1)$ ۱۶) $f(x) = Log_3 x - xe^x$

۱۷) $g(x) = 5^x \sin x$ ۱۸) $g(x) = (2 + Ln\, x)(e^x + 3)$

۱۹) $f(x) = x^2 \tanh x$ ۲۰) $f(x) = 2\sinh x \cosh x$

۲۱) $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ ۲۲) $f(x) = 2\tan^{-1} x + 3\cot^{-1} x$

۲۳) $f(x) = x^2 \cos^{-1} x$ ۲۴) $f(x) = \sqrt{x}\tan^{-1} x$

۳- مشتق تابع fog را به‌دست آورید.

۱) $f(x) = 2^{x-1}$, $g(x) = 1 + \sin x$

۲) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^3 + 3x - 1$

۴- مشتق تابع y را به‌دست آورید.

۱) $f'(x) = 2x^2 - 3x$, $y = f(\frac{1}{x})$

۲) $f'(x) = 8x - 5$, $y = f(xe^x)$

۵- مشتق توابع زیر را به کمک قاعده زنجیره‌ای و سایر قوانین مشتق به‌دست آورید.

۱) $f(x) = (3x - x^3)^5$ ۲) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 5x)^2}$

۳) $g(x) = \frac{3}{\sqrt{5x+1}}$ ۴) $g(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{5x - x^2}}$

۵) $f(x) = \cos(3x^2 + 3)$ ۶) $f(x) = \tan(2x + 1)$

۷) $f(x) = \cos 3x - 2\sin 5x$ ۸) $f(x) = \tan(2x) + \cos 7x$

۹) $f(x) = \sin 5x \cot 2x$ ۱۰) $h(x) = x^2 \sin(2x + 1)$

۱۱) $f(x) = \sqrt{\sin(2x - x^2)}$ ۱۲) $f(x) = \sin^3 5x$

۱۳) $h(x) = 2e^{5x} + 1$ ۱۴) $f(x) = 4^{\sin x}$

۱۵) $f(x) = e^x \cos(e^x)$ ۱۶) $g(x) = x^5 e^{-3 Ln\, x}$

۱۷) $f(x) = Ln(3x + 2)$ ۱۸) $g(x) = Ln \sqrt[3]{4 + 2x}$

۱۹) $f(x) = Ln^3(3x - 1)$ ۲۰) $h(x) = \cos(Ln\, x)$

۲۱) $g(x) = x \log_2(x^2 + 1)$ ۲۲) $h(x) = Ln(\sin 2x)$

۲۳) $f(x) = Ln(Ln(x + 1))$ ۲۴) $g(x) = \cos(3^{x^2})$

۲۵) $f(x) = \cos^{-1}(e^{2x})$ ۲۶) $f(x) = \tan^{-1}(2x^2 + 3)$

۲۷) $f(x) = \sin^{-1}\sqrt{1 - x^2}$ ۲۸) $f(x) = Ln(\tan^{-1} 2x)$

۲۹) $f(x) = \sinh(5x - 3)$ ۳۰) $g(x) = \tanh(e^x - 2)$

۳۱) $h(x) = \frac{(2x+1)^3}{(x-1)^4}$ ۳۲) $f(x) = (x^2 + 1)^5 (x^3 - x)^4$

۳۳) $g(x) = 2^{5x}\, 3^{x^2}$ ۳۴) $h(x) = (x + 1)^3 e^{5x+1}$

۳-۳ مشتق مراتب بالاتر، مشتق‌گیری ضمنی، لگاریتمی و پارامتری

۱) مشتق مراتب بالاتر

اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد آنگاه f' نیز، یک تابع است. اگر f' مشتق‌پذیر باشد مشتق آن را در صورت وجود با f'' نشان داده و آن را مشتق مرتبه دوم f می‌نامند. به طور مشابه مشتق تابع f'' را با f''' نشان داده و آن را مشتق مرتبه سوم f می‌گویند[۱]. در حالت کلی مشتق مرتبه nام f را با علامت $\frac{d^nf}{dx^n}$ یا $f^{(n)}(x)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱: مشتق مرتبه‌های مختلف تابع $f(x) = ۲x^۴ - ۳x^۲ + ۱۵$ به صورت زیر است:

$$f'(x) = ۸x^۳ - ۶x \quad , \quad f''(x) = ۲۴x^۲ - ۶ \quad , \quad f'''(x) = ۴۸x$$

$$f^{(۴)}(x) = ۴۸ \quad , \quad f^{(n)}(x) = ۰ \quad (n \geq ۵)$$

مثال ۲: مشتق مرتبه‌های مختلف تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ به صورت زیر است:

$$f(x) = x^{-۱} \quad , \quad f'(x) = -x^{-۲} \quad , \quad f''(x) = ۲x^{-۳}$$

$$f'''(x) = -۶x^{-۴} \quad , \quad f^{(۴)}(x) = ۲۴x^{-۵} \quad , \quad f^{(۵)}(x) = -۱۲۰x^{-۶}$$

در حالت کلی مشتق مرتبه nام این تابع به صورت $f^{(n)}(x) = \frac{(-۱)^n n!}{x^{n+۱}}$ می‌باشد.

مثال ۳: مشتق مرتبه‌های مختلف تابع $f(x) = \cos x$ به صورت زیر است:

$$f^{(۱)}(x) = -\sin x\ ,\ f^{(۲)}(x) = -\cos x\ ,\ f^{(۳)}(x) = \sin x\ ,\ f^{(۴)}(x) = \cos x$$

$$f^{(۵)}(x) = -\sin x\ ,\ f^{(۶)}(x) = -\cos x\ ,\ f^{(۷)}(x) = \sin x\ ,\ f^{(۸)}(x) = \cos x\ , \ldots$$

به طور کلی می‌توان نوشت:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -\sin x & n = ۴k-۳ \\ -\cos x & n = ۴k-۲ \\ \sin x & n = ۴k-۱ \\ \cos x & n = ۴k \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

۱- عبارت‌های f'، f'' و f'''، هماهنگ با زبان فرانسه به ترتیب اِف‌پریم، اِف‌زگوند و اِف‌تی‌یِرث تلفظ می‌شود. این تلفظ‌ها، معادل کلمات انگلیسی Prime ،Second و Third می‌باشد.

۲) مشتق‌گیری ضمنی

ابتدا به معرفی تابع ضمنی می‌پردازیم. برای هر رابطه که برحسب x و y بیان شده باشد دو حالت وجود دارد.

الف) y به طور صریح برحسب x بیان شده است، مانند:

$$y = x + \sin x \quad , \quad y = e^{۲x-۱} \quad , \quad y = x^۲ + ۲x \quad , \quad y = \frac{۱}{x+۱}$$

این نوع رابطه‌ها تابع می‌باشند. گاهی به این نوع رابطه‌ها، **تابع صریح** نیز می‌گویند.

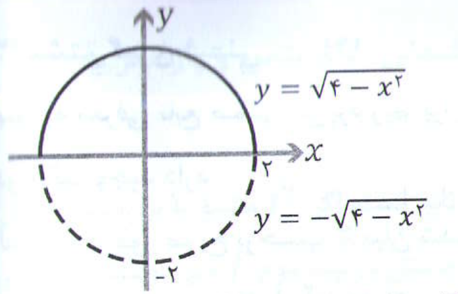
ب) y به طور صریح برحسب x بیان نشده است، مانند:

$$x^۳ + y^۳ = ۶xy \quad , \quad Ln(x^۲ + y) = ۲xy \quad , \quad xy = ۱ \quad , \quad x^۲ + y^۲ = ۴$$

این نوع رابطه‌ها ممکن است تابع نباشند ولی می‌توان آنها را به صورت اجتماع چند تابع (تابع صریح) در نظر گرفت. این نوع رابطه‌ها را **تابع ضمنی** می‌گویند.

در میان توابع ضمنی فوق، رابطه $xy = ۱$ را می‌توان به صورت تابع صریح $y = \frac{۱}{x}$ نوشت؛ در حالی‌که $x^۲ + y^۲ = ۴$ تابع صریح نمی‌باشد ولی می‌توان آن را به صورت اجتماع دو تابع صریح $y = \sqrt{۴ - x^۲}$ و $y = -\sqrt{۴ - x^۲}$ در نظر گرفت. البته محاسبه y به عنوان یک یا چند تابع صریح از x، گاهی بسیار دشوار است، به همین دلیل محاسبه مشتق y نسبت به x در هر یک از توابع صریح تشکیل دهنده یک تابع ضمنی، کار دشواری می‌باشد. خوشبختانه روش‌هایی وجود دارد که بدون پیدا کردن توابع صریح، می‌توان مشتق y را برحسب x محاسبه کرد. با ارائه یک مثال فهم و پذیرش روش مشتق‌گیری از توابع ضمنی را هموار می‌کنیم.

مثال ۴: تابع ضمنی $x^۲ + y^۲ = ۴$ یک دایره به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۲ می‌باشد. این دایره را می‌توان به صورت اجتماع دو تابع $y = \sqrt{۴ - x^۲}$ (نیم دایره بالای محور xها) و $y = -\sqrt{۴ - x^۲}$ (نیم دایره پایین محور xها) در نظر گرفت، سپس مشتق را محاسبه کرد.



$$\rightarrow y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{y}$$

$$\rightarrow y' = -\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{-\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{y}$$

مشاهده می‌کنید برای دو تابع صریح، عبارت $y' = \frac{-x}{y}$ حاصل شد. بنابراین می‌توان امیدوار بود که روش‌هایی وجود دارد که مقدار y' را برای تمام توابع صریح تشکیل دهنده یک تابع ضمنی، سریع‌تر محاسبه کند.

روش اول مشتق‌گیری ضمنی: در تابع ضمنی، y را تابعی مشتق‌پذیر از x فرض کرده و از طرفین معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم. سپس از معادله جدید y' را به‌دست می‌آوریم. در این روش از قانون مشتق تابع مرکب بسیار استفاده می‌شود.

مثال ۵: در توابع ضمنی زیر، مقدار y' به روش اول مشتق‌گیری ضمنی محاسبه شده است.

۱) $x^2 + y^2 = 4 \rightarrow 2x + 2yy' = 0 \rightarrow 2yy' = -2x \rightarrow y' = -\frac{x}{y}$

۲) $x^2y^3 = 4x \rightarrow 2xy^3 + x^2(3y'y^2) = 4 \rightarrow y' = \frac{4-2xy^3}{3x^2y^2}$

۳) $y - \sin(2x + y^2) = 5 \rightarrow y' - (2 + 2y'y)\cos(2x + y^2) = 0$

$$\rightarrow y' - 2yy'\cos(2x + y^2) = 2\cos(2x + y^2) \rightarrow y' = \frac{2\cos(2x+y^2)}{1-2y\cos(2x+y^2)}$$

روش دوم مشتق‌گیری ضمنی: ابتدا تابع ضمنی را به صورت $F(x,y) = 0$ می‌نویسیم. برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$، در عبارت $F(x,y)$ یک بار y را ثابت فرض کرده و مشتق F نسبت به x رامحاسبه می‌کنیم و آن را با F_x نمایش می‌دهیم، بار دیگر x را ثابت فرض کرده و مشتق F نسبت به y را محاسبه می‌کنیم و آن را با F_y نمایش می‌دهیم. آنگاه y' را از فرمول مقابل می‌توان به‌دست آورد. $\boxed{y' = -\frac{F_x}{F_y}}$

نکته: محاسبه y' از روش دوم نسبت به روش اول ساده‌تر است، زیرا در روش دوم، نیازی به حل معادله برای یافتن y' نمی‌باشد.

مثال ۶: در زیر برای توابع ضمنی مثال قبل، مقدار y' به روش دوم مشتق‌گیری ضمنی محاسبه شده است.

۱) $x^2 + y^2 = 4 \rightarrow F(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

$$F_x = \frac{dF}{dx} = 2x \quad , \quad F_y = \frac{dF}{dy} = 2y$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

۲) $x^2y^3 = 4x \rightarrow F(x,y) = x^2y^3 - 4x = 0$

$$F_x = \frac{dF}{dx} = 2xy^3 - 4 \quad , \quad F_y = \frac{dF}{dy} = 3x^2y^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2xy^3-4}{3x^2y^2} = \frac{4-2xy^3}{3x^2y^2}$$

۳) $y - \sin(2x + y^2) = 5 \rightarrow F(x,y) = y - \sin(2x + y^2) - 5 = 0$

$$F_x = \frac{dF}{dx} = -2\cos(2x + y^2) \ , \ F_y = \frac{dF}{dy} = 1 - 2y\cos(2x + y^2)$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2\cos(2x+y^2)}{1-2y\cos(2x+y^2)} = \frac{2\cos(2x+y^2)}{1-2y\cos(2x+y^2)}$$

محاسبه مشتق توابع معکوس مثلثاتی: در بخش قبل، پس از قضیه‌ای در مورد مشتق توابع معکوس مثلثاتی، قرار شد اثبات این قوانین را پس از معرفی تابع ضمنی و مشتق آن، بیان کنیم. اکنون شرایط انجام این عمل فراهم است.

مثال ۷: مشتق تابع $f(x) = \tan^{-1} x$: با فرض $y = \tan^{-1} x$ داریم: $x = \tan y$ از تابع ضمنی اخیر $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$x = \tan y \rightarrow 1 = y'(1 + \tan^2 y) \rightarrow y' = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

مثال ۸: مشتق تابع $f(x) = \sin^{-1} x$: با فرض $y = \sin^{-1} x$ داریم: $x = \sin y$

از تابع ضمنی اخیر $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$x = \sin y \to 1 = y' \cos y \to y' = \frac{1}{\cos y}$$

برای تابع $y = f(x)$ داریم: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ، برای نقاط $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ انتهای کمان y در ناحیه اول یا چهارم قرار دارد و در این نواحی $\cos y$ مثبت است. پس می‌توان نوشت: $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad D_{f'} = (-1,1)$$

نکته: مشتق توابع معکوس مثلثاتی را از طریق قضیه دیگری به نام قضیه **مشتق تابع معکوس**، هم می‌توان به‌دست آورد. صورت این قضیه به صورت زیر است:

« اگر تابع f در همسایگی نقطه a پیوسته و یک‌به‌یک بوده و $f'(a)$ موجود و غیر صفر باشد، آنگاه تابع f^{-1} در نقطه $b = f(a)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \text{ »}$$

تذکر: در یک تابع ضمنی به صورت $F(x,y) = 0$ برای محاسبه y' می‌توان از روش اول یا دوم مشتق‌گیری ضمنی استفاده کرد؛ ولی برای محاسبه y'' ، به دلیل اینکه y' تابعی ضمنی از x و y می‌باشد، فقط می‌توان از روش اول مشتق‌گیری ضمنی استفاده کنیم.

مثال ۹: با فرض $x^2 - 3y^2 = 5$ ، $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ را بیابید.

حل: برای محاسبه y' و y'' از مشتق‌گیری ضمنی به روش اول استفاده می‌کنیم:

$$x^2 - 3y^2 = 5 \to 2x - 6yy' = 0 \to y' = \frac{x}{3y}$$

$$y'' = \frac{(1)(3y)-x(3y')}{(3y)^2} = \frac{3y-3xy'}{9y^2} = \frac{y-xy'}{3y^2} = \frac{y-x(\frac{x}{3y})}{3y^2} = \frac{3y^2-x^2}{9y^3}$$

۴) مشتق گیری لگاریتمی

تابع $f(x) = x^x$ را برای $x > 0$ در نظر بگیرید. این تابع نه از نوع توابع چندجمله‌ای و نه از نوع توابع نمایی می‌باشد زیرا متغیر هم در پایه و هم در توان وجود دارد. یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) ریاضی‌دان سویسی به کمک لگاریتم طبیعی و مشتق‌گیری ضمنی، روشی دیگر برای مشتق این تابع ارائه کرد. این روش به صورت زیر می‌باشد:

$$y = x^x \to Ln\, y = Ln\, x^x \to Ln\, y = x\, Ln\, x$$

$$\to \frac{y'}{y} = (1)\, Ln\, x + x\frac{1}{x} \to y' = y(Ln\, x + 1) \to y' = x^x(Ln\, x + 1)$$

روش فوق را مشتق‌گیری لگاریتمی می‌نامند. این روش غیر از محاسبه مشتق توابعی به صورت $y = u^v$ ، برای محاسبه مشتق توابعی که شکل پیچیده‌ای دارند می‌تواند بسیار مفید باشد. لازم به تذکر است که در تابع $y = u^v$ توابع u و v توابعی مشتق‌پذیر از x و $u > 0$ می‌باشد. می‌توان این تابع را به صورت $y = e^{v\, ln\, u}$ نوشت و از آن مشتق گرفت.

مثال ۱۰: مشتق تابع $f(x) = (\sqrt{x})^{\sin 2x}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$y = (\sqrt{x})^{\sin 2x} \to y = x^{\frac{1}{2}\sin 2x} \to Ln\, y = Ln(x^{\frac{1}{2}\sin 2x})$$

$$\to Ln\, y = \frac{1}{2}\sin 2x\, Ln\, x \xrightarrow{\text{مشتق گیری ضمنی}} \frac{y'}{y} = \cos 2x\, Ln\, x + \frac{1}{2}(\sin 2x)\frac{1}{x}$$

$$\to y' = y\left[\cos 2x\, Ln\, x + \frac{\sin 2x}{2x}\right] \to y' = (\sqrt{x})^{\sin 2x}\left[\cos 2x\, Ln\, x + \frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

مثال ۱۱: در زیر مشتق یک تابع به کمک مشتق‌گیری لگاریتمی محاسبه شده است.

$$y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1}\,(x-3)} \to Ln\, y = Ln\sqrt[3]{x+1} - Ln\sqrt{2x+1} - Ln(x-3)$$

$$Ln\, y = \frac{1}{3}Ln(x+1) - \frac{1}{2}Ln(2x+1) - Ln(x-3)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری ضمنی}} \frac{y'}{y} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{2(2x+1)} - \frac{1}{x-3} \to y' = y\left[\frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{x-3}\right]$$

$$\to y' = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1}\,(x-3)}\left[\frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{x-3}\right]$$

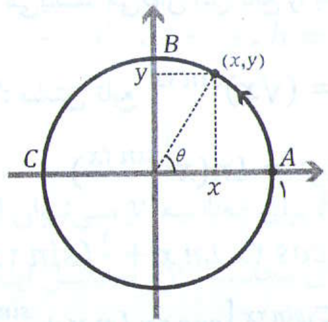
۴) مشتق‌گیری پارامتری

وقتی مسیر حرکت یک متحرک در صفحه تابع نباشد نمی‌توان با بیان مستقیم y برحسب x، مسیر را توصیف کرد. این مطلب یکی از دلایلی می‌باشد که برای توصیف مسیرحرکت یک متحرک درصفحه، نمایش دیگری را وضع کرده‌اند و آن اینکه مختصات متحرک را با دو معادله مانند معادلات زیر، به صورت توابعی از متغیر سومی مانند t می‌نویسند:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

متغیر t را پارامتر و معادلات را، معادلات پارامتری یا تابع پارامتری می‌نامند. در بسیاری از مسائل کاربردی پارامتر t زاویه یا زمان می‌باشد. اگر بتوانیم با یک سری عملیات، t را از دو معادله حذف کنیم رابطه‌ای برحسب x و y به‌دست می‌آید که این رابطه تابع صریح یا تابع ضمنی خواهد بود، البته این عملیات معمولاً کار ساده‌ای نمی‌باشد.

مثال ۱۲: هرگاه متحرکی بر روی یک دایره به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۱ از نقطه $A(1,0)$ و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حرکت کند، مسیر این متحرک را به صورت زیر می‌توان توصیف کرد:



$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

به عنوان نمونه این متحرک در $\theta = 0$ در نقطه $A(1,0)$، در $\theta = \frac{\pi}{2}$ در نقطه $B(0,1)$ و در $\theta = \pi$ در نقطه $C(-1,0)$ قرار دارد. با تغییر توابع x و y می‌توان نقطه شروع حرکت و جهت حرکت را تغییر داد[1]. در عملیات زیر متغیر θ حذف گردیده و مسیر حرکت را به صورت یک تابع ضمنی نمایش داده‌ایم.

$$x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

۱- این نوع منحنی‌ها را منحنی‌های جهت‌دار می‌گویند. این موضوع در فصل سوم کتاب ریاضیات عمومی دو، تحت عنوان توابع برداری مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ۱۳: با حذف پارامتر t، توابع پارامتری زیر را به صورت تابع صریح یا تابع ضمنی نوشته‌ایم.

۱) $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$

$$x = 2t + 3 \rightarrow t = \frac{1}{2}(x-3) \rightarrow y = \frac{1}{4}(x-3)^2 + 2$$

۲) $\begin{cases} x = e^t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

$$x = e^t \rightarrow t = Ln\,x \rightarrow y = (Ln\,x)^2 + 1$$

۳) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$

$$[(x = \sqrt{t} \rightarrow t = x^2)\ ,\ (y = \sqrt[3]{t} \rightarrow t = y^3)] \rightarrow x^2 = y^3$$

۴) $\begin{cases} x = 2\cos 3t \\ y = 5\sin 3t \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2\cos 3t \rightarrow \cos 3t = \frac{x}{2} \\ y = 5\sin 3t \rightarrow \sin 3t = \frac{y}{5} \end{cases} \rightarrow \cos^2 3t + \sin^2 3t = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

روش مشتق‌گیری از تابع پارامتری: برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$ به دو روش می‌توان عمل کرد.

روش اول: پارامتر t را از معادلات حذف کرده تا به یک تابع صریح یا ضمنی برسیم، سپس $\frac{dy}{dx}$ را مطابق آنچه قبلاً گفته‌ایم محاسبه می‌کنیم.

روش دوم: بدون حذف t از معادلات پارامتری و به کمک قانون مشتق تابع مرکب، $\frac{dy}{dx}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

فرمول اخیر، را فرمول مشتق‌گیری از یک تابع پارامتری یا به اختصار مشتق‌گیری پارامتری می‌نامند. واضح است که روش دوم نسبت به روش اول ساده‌تر می‌باشد زیرا مشکلات حذف پارامتر t را ندارد.

مثال ۱۴: در تابع پارامتری $y = t^۲ + ۵$ و $x = ۲t + ۱$ ، از دو روش $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه کرده و نتیجه را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: روش اول : $x = ۲t + ۱ \rightarrow t = \frac{۱}{۲}(x - ۱) \rightarrow y = \frac{۱}{۴}(x - ۱)^۲ + ۵$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{۴} \times ۲(x - ۱) = \frac{۱}{۲}(x - ۱)$$

روش دوم: $(\frac{dx}{dt} = ۲ \ , \ \frac{dy}{dt} = ۲t) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{۲t}{۲} = t$

چون $t = \frac{۱}{۲}(x - ۱)$ ، بنابراین از هر دو روش، نتیجه یکسانی حاصل شد.

مثال ۱۵: در تابع پارامتری $x = t^۲ + ۲t$ و $y = \sqrt{t + ۱}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ را در نقطه نظیر $t = ۳$ محاسبه کنید.

حل: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{t+۱}}}{۲t+۲} = \frac{۱}{۴(t+۱)\sqrt{t+۱}}$

$$t = ۳ \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۱}{۴\times۴\times۲} = \frac{۱}{۳۲}$$

مثال ۱۶: در تابع پارامتری $y = \frac{۱}{t}$ و $x = t^۲ + ۱$ ، مقدار $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ را محاسبه کنید.

حل: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{۱}{t^۲}}{۲t} = \frac{-۱}{۲t^۳} = -\frac{۱}{۲}t^{-۳}$

$$\frac{dy'}{dt} = -\frac{۱}{۲}(-۳t^{-۴}) = \frac{۳}{۲}t^{-۴}$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{۳}{۲}t^{-۴}}{۲t} = \frac{۳}{۴t^۵}$$

تمرین

۱- مشتق اول و دوم توابع داده شده را بیابید.

۱) $f(x) = \frac{x+۱}{x^۲}$ ۲) $g(x) = sin(x^۲)$

۳) $h(x) = e^{x^۲+۱}$ ۴) $f(x) = (Ln\,x)^۲$

۲- مشتق‌های مرتبه اول تا چهارم توابع داده شده را بیابید.

۱) $f(t) = ۳\sin ۲t$ ۲) $f(x) = e^{۳x+۱}$

۳) $f(x) = \frac{۳}{۲x-۱}$ ۴) $f(t) = \sqrt{۴t + ۱}$

۳- قانونی برای محاسبه مشتق مرتبه nام توابع داده شده، بیابید.

۱) $f(x) = a^x$ ۲) $f(x) = e^{۲x}$

۳) $f(x) = Ln\,x$ ۴) $f(x) = \sin x$

۴- در توابع ضمنی، $\frac{dy}{dx}$ را به روش دلخواه بیابید.

۱) $x^۲ + y^۳ = ۳xy + ۲$ ۲) $۳x^۴y^۲ - ۷xy^۲ = ۸ - ۳y$

۳) $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = ۱$ ۴) $\frac{x+y}{x^۲-۱} = y$

۵) $x\cos y + y\cos x = ۱$ ۶) $cos(۲x + ۳y) = y\sin x$

۷) $e^y = Ln(x^۳ + ۳y)$ ۸) $ye^{۲x} + xe^{۲y} = ۱$

۹) $tan^{-۱}y = x\sin y$ ۱۰) $sin^{-۱}(۲y) + x^۲ = xy$

۵- در توابع ضمنی، $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ را محاسبه کنید.

۱) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = ۱$ ۲) $x^۳ + y^۳ = ۱$

۳) $x^۲y^۳ = ۴$ ۴) $x^۲ + ۶xy + y^۲ = ۸$

۶- به کمک مشتق‌گیری ضمنی ، قوانین زیر را ثابت کنید.

۱) $(cos^{-۱}x)' = \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ ۲) $(cot^{-۱}x)' = \frac{-۱}{۱+x^۲}$

۷- مشتق توابع زیر را به‌دست آورید (برای شناخت بیشتر این توابع جدید، دامنه آنها را مشخص کرده‌ایم).

۱) $f(x) = x^{\sqrt{x}} \quad , \quad ۰ < x$ ۲) $f(x) = x^{Ln\, x} \quad , \quad ۰ < x$

۳) $f(x) = (ln\, x)^{x} \quad , \quad ۱ < x$ ۴) $f(x) = (sin\, x)^{x} \;, ۲k\pi < x < (۲k+۱)\pi$

۸- با استفاده از مشتق‌گیری لگاریتمی، مشتق توابع داده شده را بیابید.

۱) $f(x) = x^{۳}(x^{۲}-۱)^{۵}(x+۱)^{۴}$ ۲) $f(x) = \sqrt{cos\, x}\, sin\, ۳x\, tan\, x$

۳) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^{۲}+۱}}{\sqrt[۳]{(x+۱)^{۲}}}$ ۴) $f(x) = \dfrac{x^{۵}\, tan^{-۱} x}{(۳-۲x)\sqrt[۳]{x}}$

۹- در توابع پارامتری، ابتدا t را حذف کرده، سپس از رابطه جدید، $\dfrac{dy}{dx}$ را بیابید.

۱) $\begin{cases} x = ۳t+۲ \\ y = t^{۳} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{۱+t} \\ y = Ln(t+۱) \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x = sin\, ۳t \\ y = cos\, ۳t \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = ۹t^{۲} \\ y = ۳t-۲ \end{cases}$

۱۰- در توابع پارامتری، با مشتق‌گیری پارامتری، $\dfrac{dy}{dx}$ را بیابید.

۱) $\begin{cases} x = e^{۵t} \\ y = t\, Ln\, t \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = t^{۲}+۵t \\ y = t^{۳}+۲t^{۲}-۱ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x = cos\, ۲t \\ y = sin(۳t+۱) \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = sec\, t \\ y = t\, cos\, t \end{cases}$

۱۱- در توابع پارامتری، $\dfrac{dy}{dx}$ را در نقطه نظیر $t = ۲$ محاسبه کنید.

۱) $\begin{cases} x = \sqrt{۲t^{۲}+۱} \\ y = (۲t+۱)^{۲} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = t\sqrt{۲t+۵} \\ y = \sqrt[۳]{۴t} \end{cases}$

۱۲- در توابع پارامتری، $\dfrac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ را محاسبه کنید.

۱) $\begin{cases} x = t+t^{-۱} \\ y = t-t^{-۱} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = t^{۲}+۱ \\ y = t^{۳}-۱ \end{cases}$

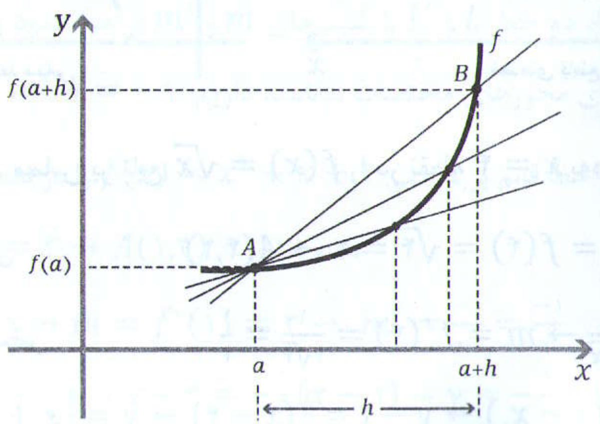
فصل چهارم

کاربرد مشتق

۴-۱ تعبیر هندسی مشتق و معادله خط مماس و خط قائم

در شکل زیر نمودار تابع f و نقاط A و B واقع بر آن را در نظر بگیرید. از دو نقطه A و B یک خط می‌گذرد. هرگاه نقطه A را ثابت فرض کرده و نقطه B را بر روی منحنی به سمت A حرکت دهیم، حالت حدی خط AB، خطی خواهد بود که با منحنی f در یک نقطه تماس دارد. این خط را، خط مماس بر منحنی f در نقطه A می‌گویند. شیب خط AB به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$m_{AB} = \frac{y_{۲}-y_{۱}}{x_{۲}-x_{۱}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

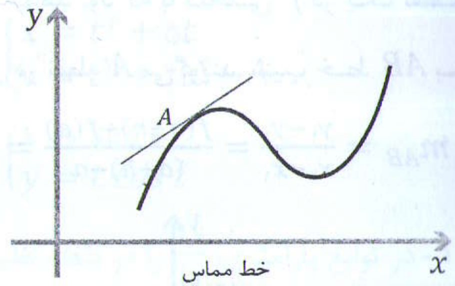


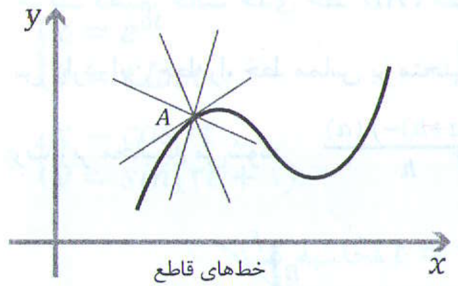
با حرکت نقطه B به سمت نقطه A ، مقدار h به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین اگر شیب خط مماس در نقطه A را m بنامیم، داریم: $m = \lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

در صورت وجود حد فوق، این مقدار، همان مشتق تابع f در $x = a$ یعنی $f'(a)$ می‌باشد. به عبارت دیگر شیب خط مماس بر یک منحنی در نقطه‌ای به طول $x = a$ برابر $f'(a)$ می‌باشد.

نکته : اگر برای تابع f مقدار $\lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود، آنگاه خط $x = a$ مماس بر منحنی می‌باشد.

تذکر: تعریف خط مماس، به عنوان خطی که منحنی را در یک نقطه قطع می‌کند نادرست می‌باشد. با این تعریف در یک نقطه، تعداد نامتناهی خط مماس بر منحنی می‌توان رسم کرد. با توجه به اینکه حد تابع در صورت وجود منحصر به فرد است، بنابراین خط مماس هم در صورت وجود تنها یکی می‌باشد. **لذا خط مماس را همان حالت حدی خط AB در حرکت نقطه B به سمت A باید در نظر گرفت.**



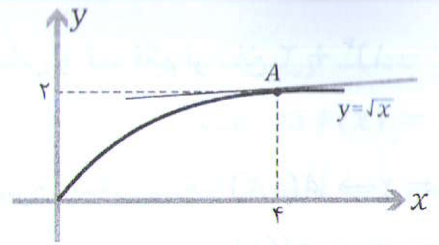


مثال ۱: معادله خط مماس بر تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $x = ۴$ به‌دست آورید.

حل: نقطه تماس $x = ۴ \to y = f(۴) = \sqrt{۴} = ۲ \to A(۴,۲)$

شیب خط مماس $f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \to m = f'(۴) = \frac{۱}{۲\sqrt{۴}} = \frac{۱}{۴}$

معادله خط مماس $y - y_۱ = m(x - x_۱) \to y - ۲ = \frac{۱}{۴}(x - ۴) \to y = \frac{۱}{۴}x + ۱$



مثال ۲: معادله خط مماس بر تابع $f(x) = x + e^x$ را در نقطه $x = ۰$ بیابید.

حل: نقطه تماس $x = ۰ \to y = f(۰) = ۰ + e^۰ = ۱ \to A(۰,۱)$

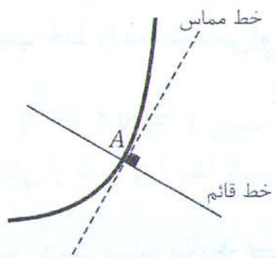
شیب خط مماس $f'(x) = ۱ + e^x \to m = f'(۰) = ۱ + e^۰ = ۲$

معادله خط مماس $y - y_۱ = m(x - x_۱) \to y - ۱ = ۲(x - ۰) \to y = ۲x + ۱$

مثال ۳: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ را در نقطه $x = ۰$ بیابید.

حل: تابع f در نقطه $x = ۰$ پیوسته است و داریم: $f'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$. بنابراین $f'(۰)$ یک عدد حقیقی نیست ولی داریم: $\lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(۰+h)-f(۰)}{h} = \lim\limits_{h\to ۰} \frac{\sqrt[۳]{h}}{h} = \lim\limits_{h\to ۰} \frac{۱}{\sqrt[۳]{h^۲}} = +\infty$

لذا خط $x = ۰$ خط مماس بر منحنی تابع f است (شکل خط مماس، شبیه شکل مثال ۵ است).



تعریف ۱: خطی که بر خط مماس بر یک منحنی در نقطه تماس عمود باشد، **خط قائم** بر منحنی در آن نقطه نامیده می‌شود.

یادآوری: هرگاه دو خط L و L' با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند به شرط آنکه این خط‌ها موازی محورهای مختصات نباشند، داریم: $m'm = -۱$ یا $m' = \frac{-۱}{m}$

مثال ۴: معادله خط قائم بر منحنی $f(x) = x^۲ + x + ۱$ را در نقطه $x = ۱$ بیابید.

حل: نقطه تماس $x = ۱ \to f(۱) = ۳ \to A(۱,۳)$

شیب خط قائم $f'(x) = ۲x + ۱ \to m = f'(۱) = ۳ \to m' = \frac{-۱}{m} = \frac{-۱}{۳}$

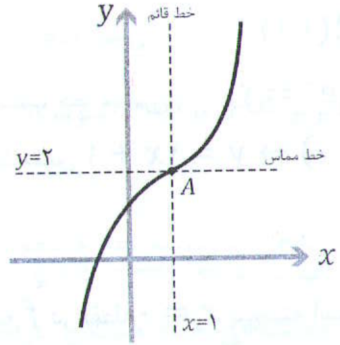
معادله خط قائم $y - y_۱ = m'(x - x_۱) \to y - ۳ = -\frac{۱}{۳}(x - ۱) \to y = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۱۰}{۳}$

مثال ۵: معادله خط مماس و خط قائم بر تابع $f(x) = (x-۱)^۳ + ۲$ را در نقطه $x = ۱$ به‌دست آورید.

حل:

$x = ۱ \rightarrow y = f(۱) = ۲ \rightarrow A(۱,۲)$ نقطه تماس

$f'(x) = ۳(x-۱)^۲ \rightarrow m = f'(۱) = ۰$ شیب خط مماس



چون شیب خط مماس برابر صفر است پس خط مماس موازی محور xها و خط قائم موازی محور yها می‌باشد. از طرفی این دو خط از نقطه $(۱,۲)$ می‌گذرند. لذا خط‌های $y = ۲$ و $x = ۱$ به ترتیب خط‌های مماس و قائم خواهند بود.

مثال ۶: مختصات نقاطی از تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را به‌دست آورید که خطوط مماس بر نمودار f در آن نقاط، با خط $L: ۴y + x = ۱$ موازی باشد.

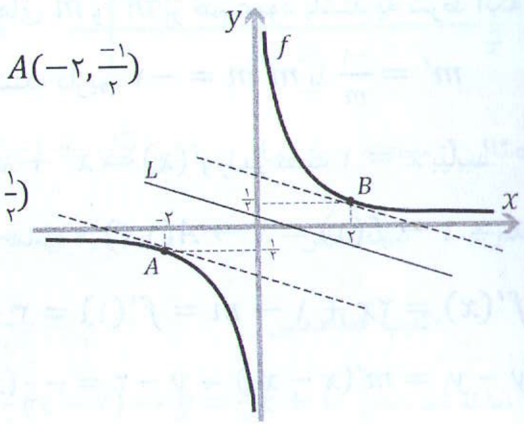
حل: ابتدا شیب خط را به‌دست می‌آوریم:

$$۴y + x = ۱ \rightarrow y = \frac{-۱}{۴}x + \frac{۱}{۴} \rightarrow m = \frac{-۱}{۴}$$

اکنون باید نقاطی از تابع f را پیدا کنیم که شیب خط مماس در آن نقاط برابر $(-\frac{۱}{۴})$ باشد.

$$f'(x) = \frac{-۱}{x^۲} \rightarrow \frac{-۱}{x^۲} = \frac{-۱}{۴} \rightarrow x^۲ = ۴ \rightarrow x = \pm ۲$$

$$\begin{cases} x = -۲ \rightarrow y = f(-۲) = \frac{۱}{-۲} \rightarrow A(-۲, \frac{-۱}{۲}) \\ \text{یا} \\ x = ۲ \rightarrow y = f(۲) = \frac{۱}{۲} \rightarrow B(۲, \frac{۱}{۲}) \end{cases}$$

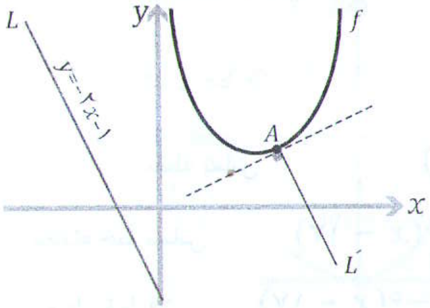


مثال ۷: معادله خط‌هایی را به‌دست آورید که موازی خط $L: y = -۲x - ۱$ بوده و بر منحنی $f(x) = x^۲ - ۲x + ۲$ قائم باشند.

حل: فرض کنیم A نقطه تماس خط قائم بر منحنی باشد. چون شیب خط L برابر m است، پس برای شیب خط مماس در نقطه A داریم: $m' = \frac{-۱}{m} = \frac{-۱}{-۲} = \frac{۱}{۲}$

لذا به دنبال نقاطی هستیم که: $f'(x) = \frac{۱}{۲}$

$$f'(x) = ۲x - ۲ = \frac{۱}{۲} \rightarrow x = \frac{۵}{۴} \ , \ y = f(\frac{۵}{۴}) = \frac{۱۷}{۱۶} \rightarrow A(\frac{۵}{۴}, \frac{۱۷}{۱۶})$$ نقطه تماس



چون یک نقطه تماس به‌دست آمد، پس تنها یک معادله خط قائم داریم و آن به صورت زیر است:

$$L': y - \frac{۱۷}{۱۶} = -۲(x - \frac{۵}{۴})$$

تذکر: برای حل مثال‌های ۶ و ۷ رسم شکل واقعی ضرورتی ندارد ولی رسم یک شکل فرضی، کمک زیادی به درک و حل مسئله خواهد کرد.

مثال ۸: معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی $x^۲ + y^۲ - ۲y = ۴$ را در نقطه $(-۱,۳)$ به‌دست آورید.

حل: معادله منحنی فوق یک تابع ضمنی است، پس به کمک مشتق‌گیری ضمنی ابتدا y' را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲y = ۴ \rightarrow ۲x + ۲yy' - ۲y' = ۰ \rightarrow ۲y'(y-۱) + ۲x = ۰$$

$$y' = \frac{-x}{y-۱} \xrightarrow{(-۱,۳)} m = \frac{۱}{۳-۱} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین شیب خط مماس $m = \frac{۱}{۲}$ و شیب خط قائم $m' = -۲$ است، لذا داریم:

$y - ۳ = \frac{۱}{۲}(x+۱) \rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۷}{۲}$ معادله خط مماس

$y - ۳ = -۲(x+۱) \rightarrow y = -۲x + ۱$ معادله خط قائم

مثال ۹: معادله حرکت متحرکی در صفحه به صورت $x = ۲t^۳ + ۱$ و $y = t^۲ + ۳$ می‌باشد. معادله خط مماس وخط قائم بر مسیر حرکت این متحرک را در لحظه $t = ۲$ به‌دست آورید.

حل: معادله حرکت این متحرک به صورت یک تابع پارامتری است، پس به کمک مشتق‌گیری پارامتری ابتدا $\frac{dy}{dx}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{۲t}{۶t^۲} = \frac{۱}{۳t} \xrightarrow{t=۲} m = \frac{۱}{۶}$$ شیب خط مماس

$$m' = \frac{-۱}{m} = \frac{-۱}{\frac{۱}{۶}} = -۶$$ شیب خط قائم

$$t = ۲ \to (x = ۱۷, y = ۷) \to (۱۷,۷)$$ نقطه تماس

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \to y - ۷ = \frac{۱}{۶}(x - ۱۷)$$ معادله خط مماس

$$y - y_۱ = m'(x - x_۱) \to y - ۷ = -۶(x - ۱۷)$$ معادله خط قائم

تعیین معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی از نقطه‌ای خارج منحنی:

روش تعیین معادله خط مماس را توضیح می‌دهیم، روش تعیین معادله خط قائم به‌طور مشابه می‌باشد. فرض کنید نقطه $(x_۱, y_۱)$ ، خارج منحنی f باشد. هم‌چنین فرض کنید نقطه تماس خط مماس بر منحنی، $T(a, f(a))$ باشد. بنابراین معادله خط مماس در نقطه T عبارت است از :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (*)$$

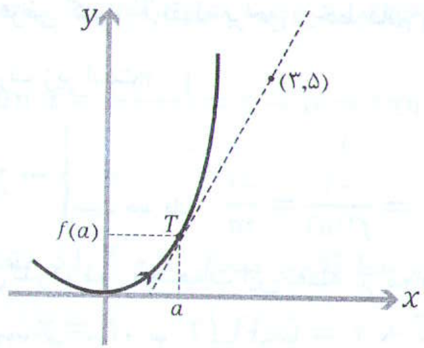
چون قرار است این خط از نقطه $(x_۱, y_۱)$ بگذرد پس مختصات این نقطه در معادله خط مماس باید صدق کند:

$$y_۱ - f(a) = f'(a)(x_۱ - a)$$

عبارت اخیر یک معادله یک مجهولی برحسب a می‌باشد. پس از حل این معادله نقاط تماس به‌دست می‌آید. با قرار دادن مقدار a در رابطه * معادلات خطوط مماس را هم می‌توان نوشت.

مثال ۱۰: یک موشک بر روی مسیری به شکل $f(x) = x^۲$ حرکت می‌کند. اگر موتورهای خود را خاموش کند بر خطی مماس بر منحنی f به حرکت ادامه می‌دهد. در چه نقطه‌ای موتورهای خود را خاموش کند تا از نقطه (۳,۵) بگذرد.

حل: به تعبیر دیگر می‌خواهیم از نقطه (۳,۵) که خارج سهمی $f(x) = x^۲$ می‌باشد مماسی بر منحنی رسم کنیم، به دنبال نقطه تماس T هستیم. ابتدا معادله خط مماس در نقطه T را به‌دست می‌آوریم.



$$\left.\begin{array}{ll} T(a, f(a)) = T(a, a^۲) & \text{نقطه تماس} \\ f'(x) = ۲x \to m = f'(a) = ۲a & \text{شیب خط مماس} \end{array}\right\} \to y - a^۲ = ۲a(x - a)$$

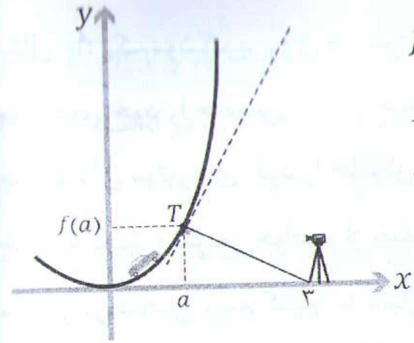
می‌خواهیم خط فوق از نقطه (۳,۵) بگذرد، پس باید داشته باشیم:

$$۵ - a^۲ = ۲a(۳ - a) \to a^۲ - ۶a + ۵ = ۰$$

$$\to (a = ۱ \text{ یا } a = ۵) \to (\ T_۱(۱,۱) \text{ و } T_۲(۵,۲۵)\ )$$

با توجه به شکل، این موشک باید موتورهایش را در نقطه $T_۱$ خاموش کند تا از نقطه (۳,۵) بگذرد. اگر مسیر حرکت خلاف جهت شکل فوق باشد، باید موتورها در نقطه $T_۲$ خاموش شوند.

مثال ۱۱: مسیر یک جاده به صورت $f(x) = x^{۲}$ می‌باشد. برای یک کار آماری، یک دوربین را در نقطه $(۳,۰)$ عمود بر مسیر جاده قرار داده‌اند. موقعیتی از جاده که حرکت اتومبیل‌ها توسط دوربین ثبت می‌شود را پیدا کنید.



حل: به تعبیر دیگر می‌خواهیم از نقطه $(۳,۰)$ خطی قائم بر منحنی رسم کنیم؛ به دنبال نقطه تماس هستیم. فرض کنید T نقطه برخورد خط قائم و منحنی باشد، معادله خط قائم در نقطه T به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{ll} T(a,f(a)) = T(a,a^{۲}) & \text{نقطه تماس} \\ f'(x) = ۲x \rightarrow m = \frac{-۱}{f'(a)} = \frac{-۱}{۲a} & \text{شیب خط قائم} \end{array}\right\} \rightarrow y - a^{۲} = \frac{-۱}{۲a}(x - a)$$

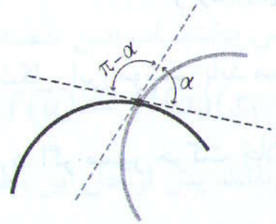
خط قائم از نقطه $(۳,۰)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله خط صدق می‌کند:

$$۰ - a^{۲} = \frac{-۱}{۲a}(۳ - a) \rightarrow -۲a^{۳} = -۳ + a \rightarrow ۲a^{۳} + a - ۳ = ۰$$

تنها ریشه معادله فوق $a = ۱$ می‌باشد. چون $f(۱) = ۱$ پس نقطه $(۱,۱)$ جواب مسئله می‌باشد.

توضیح در مورد محاسبات مثال ۱۱: مجموع ضرایب معادله $۲a^{۳} + a - ۳ = ۰$، صفر می‌باشد. پس یکی از ریشه‌های معادله $a = ۱$ است، با تقسیم عبارت $۲a^{۳} + a - ۳$ بر $a - ۱$ داریم: $۲a^{۳} + a - ۳ = (a - ۱)(۲a^{۲} + ۲a + ۳)$. برای به‌دست آوردن ریشه‌های دیگر معادله درجه سه، معادله $۲a^{۲} + ۲a + ۳ = ۰$ را حل می‌کنیم. در این معادله $\Delta < ۰$ می‌باشد؛ پس این معادله ریشه حقیقی ندارد. بنابراین این معادله درجه سه، تنها یک ریشه حقیقی دارد و آن $a = ۱$ است.

تعریف ۲: هرگاه دو منحنی در نقطه‌ای متقاطع باشند، زاویه بین خطوط مماس بر این دو منحنی در آن نقطه را، **زاویه بین دو منحنی** می‌نامند.



تذکر: هرگاه α زاویه بین دو خط باشد، $\pi - \alpha$ را نیز می‌توان زاویه بین دو خط در نظر گرفت، ولی معمولاً زاویه کوچک‌تر انتخاب می‌شود.

مثال ۱۲: ابتدا نقاط برخورد منحنی‌های $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{۱}{x}$ را به‌دست آورید. سپس زاویه بین دو منحنی را در نقاط مشترک محاسبه کنید.

حل: $f(x) = g(x) \rightarrow \sqrt{x} = \frac{۱}{x} \rightarrow x = \frac{۱}{x^{۲}} \rightarrow x^{۳} = ۱ \rightarrow x = ۱$

شیب خط‌های مماس بر دو منحنی f و g در نقطه $x = ۱$ برابر است با:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \rightarrow m_{۱} = f'(۱) = \frac{۱}{۲} \quad , \quad g'(x) = -\frac{۱}{x^{۲}} \rightarrow m_{۲} = g'(۱) = -۱$$

هرگاه α زاویه بین دو خط مماس باشد بنابر فرمولی در ریاضیات مقدماتی داریم[1]:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_{۱} - m_{۲}}{۱ + m_{۱}m_{۲}}\right| \rightarrow \tan\alpha = \left|\frac{\frac{۱}{۲}+۱}{۱-\frac{۱}{۲}\times۱}\right| = ۳ \rightarrow \alpha = \tan^{-۱}(۳) = ۷۱/۵۶^{\circ}$$

تمرین

۱- معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی تابع f را در نقطه داده شده بیابید.

۱) $f(x) = \sqrt{x^{۲} + ۳x} \;,\; x = ۱$ ۲) $f(x) = ۲ + \sqrt[۳]{x - ۱} \;,\; x = ۱$

۳) $f(x) = \tan x \;,\; x = \frac{\pi}{۴}$ ۴) $f(x) = \cos^{-۱} x \;,\; x = ۰$

۵) $f(x) = e^{-x} \;,\; x = Ln\,۲$ ۶) $f(x) = Ln(۴x^{۲} - ۳) \;,\; x = ۱$

۲- معادله خط‌هایی را بنویسید که بر منحنی تابع f مماس و با خط L موازی باشند.

۱) $f(x) = \frac{e^{x}}{x} \quad , \quad L: y - ۲ = ۰$

۲) $f(x) = ۲x^{۳} - ۵x + ۱ \quad , \quad L: y - x = ۲$

۳- معادله خط‌هایی را بنویسید که بر منحنی تابع f مماس و بر خط L عمود باشند.

۱) $f(x) = \sqrt{x - ۳} \quad , \quad L: ۲y + ۸x = ۱$

۲) $f(x) = x\,Ln\,x \quad , \quad L: ۲x - ۲y = ۳$

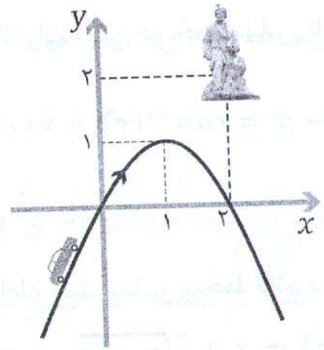
۱- در این کتاب پس از محاسبه مقدار عددی یک عبارت تا چند رقم اعشار، از علامت مساوی استفاده می‌کنیم.

۴- معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی تابع ضمنی را در نقطه داده شده بیابید.

۱) $x\cos y + y\cos x = \pi \ , \ p(\cdot,\pi)$ ۲) $x^{2}y + xy^{3} = 2x \ , \ p(1,1)$

۵- معادله خط مماس بر منحنی تابع پارامتری در نقطه نظیر $t = t_{\cdot}$ را به‌دست آورید.

۱) $\begin{cases} x = \sqrt{2t^{2}+1} \\ y = (3t-4)^{2} \end{cases} \ , \ t_{\cdot} = 2$ ۲) $\begin{cases} x = te^{t} \\ y = t\,Ln\,t \end{cases} \ , \ t_{\cdot} = 1$



۶- خودرویی در شب بر روی جاده‌ای به معادله $f(x) = 2x - x^{2}$ از غرب به شرق در حال حرکت است. در کنار جاده، مجسمه‌ای در نقطه $A(2,2)$ قرار دارد. در چه نقطه‌ای خودرو توقف کند تا مسافران به کمک نور خودرو، مجسمه را مشاهده کنند.

۷- یک جنگنده از چپ به راست بر روی مسیر $f(x) = x^{2}$ پرواز می‌کند. هرگاه این جنگنده موشکی را شلیک کند، این موشک بر روی خطی مماس بر مسیر منحنی f حرکت خواهد کرد. در چه نقطه‌ای شلیک انجام شود تا هدف در نقطه $(4,15)$ مورد اصابت قرار گیرد (از ارتفاع جنگنده تا سطح زمین صرف نظر کنید).

۸- از نقطه $M(1,4)$ بر منحنی $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ خط‌هایی را مماس کرده‌ایم، مختصات نقاط تماس را به‌دست آورید.

۹- ابتدا نقاط برخورد منحنی‌های توابع زیر را به‌دست آورید، سپس زاویه بین دو منحنی را در نقطه مشترکی که کمترین طول را دارد، محاسبه کنید.

۱) $f(x) = x^{2} \ , \ g(x) = \frac{2x}{x-1}$

۲) $f(x) = x^{3} + 3x^{2} + 2x \ , \ g(x) = 2x^{3} + 4x$

۴-۲ میزان متوسط و لحظه‌ای تغییر[1]

تعریف ۱: هرگاه متغیر y به متغیر دیگری مانند x با رابطه $y = f(x)$ وابسته باشد؛

الف) میزان متوسط تغییر y نسبت به x را وقتی x از $x_1 = a$ تا $x_2 = a + h$ تغییر کند، به صورت مقابل تعریف می‌کنیم: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

ب) اگر میزان متوسط تغییر، وقتی h را به سمت صفر میل می‌دهیم دارای حد باشد، مقدار این حد را میزان لحظه‌ای یا آنی تغییر y نسبت به x در $x = a$ می‌نامیم؛ با توجه به تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

مثال ۱: هرگاه مساحت یک دایره را با s و شعاع آن را با r نمایش دهیم، s تابعی از r به صورت $s(r) = \pi r^{2}$ می‌باشد. میزان متوسط تغییر مساحت نسبت به شعاع وقتی r از $r_1 = 2$ تا $r_2 = 4$ تغییر می‌کند به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\Delta s}{\Delta r} = \frac{s(4)-s(2)}{4-2} = \frac{16\pi-4\pi}{2} = 6\pi$$

همچنین میزان لحظه‌ای تغییر مساحت نسبت به شعاع در $r = 4$ با توجه به رابطه $s'(r) = 2\pi r$، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(4+h)-s(4)}{h} = s'(4) = 2\pi(4) = 8\pi$$

مثال ۲: میزان تغییر لحظه‌ای مساحت یک دایره نسبت به محیط آن، وقتی محیط دایره برابر 8π باشد را محاسبه کنید.

حل: هرگاه مساحت و محیط دایره را به ترتیب با s و p نمایش دهیم s و p توابعی از متغیر r هستند، لذا می‌توان از مشتق‌گیری پارامتری استفاده کرد. داریم:

$$p = 2\pi r = 8\pi \to r = 4$$

$$s = \pi r^{2} \to \frac{ds}{dr} = 2\pi r \quad , \quad p = 2\pi r \to \frac{dp}{dr} = 2\pi$$

$$\frac{ds}{dp} = \frac{\frac{ds}{dr}}{\frac{dp}{dr}} = \frac{2\pi r}{2\pi} = r \xrightarrow{r=4} \frac{ds}{dp} = 4$$

۱- بعضی از مؤلفین به جای عبارت «میزان تغییر»، از عبارت‌های «آهنگ تغییر» یا «نرخ تغییر» استفاده کرده‌اند.

نکته: محاسبه میزان تغییرات تقریباً در همه رشته‌های علوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. بعضی از آنها که دارای اسامی خاص می‌باشند به شرح زیر است:

سرعت: میزان تغییرات طول، مساحت یا حجم نسبت به زمان

شتاب: میزان تغییرات سرعت نسبت به زمان

توان: میزان تغییرات کار نسبت به زمان

جریان: میزان تغییرات بار الکتریکی نسبت به زمان

چگالی: میزان تغییرات جرم نسبت به طول یا سطح یا حجم

تراکم‌پذیری: میزان تغییرات حجم نسبت به فشار

رشد: میزان تغییرات جمعیت نسبت به زمان

هزینه نهایی: میزان تغییرات هزینه نسبت به مقدار محصول

درآمد نهایی: میزان تغییرات درآمد نسبت به مقدار محصول

سود نهایی: میزان تغییرات سود نسبت به مقدار محصول

هم‌چنین می‌توان از میزان تغییر فشار جو نسبت به ارتفاع در هواشناسی، میزان بهبود رفتار در روانشناسی، میزان پخش یک شایعه در جامعه‌شناسی و میزان شارش آب ورودی یا خروجی یک مخزن در مهندسی به عنوان نمونه‌هایی از کاربرد میزان تغییرات نام برد.

مثال ۳: مکان جسم متحرکی روی خط راست از معادله $s(t) = t^۳ + ۶t^۲ + ۹t$ به‌دست می‌آید که در آن s برحسب متر و t برحسب ثانیه است. سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $[۰,۲]$ و سرعت لحظه‌ای را در زمان $t = ۲$ بیابید.

حل: با توجه به اینکه سرعت، تغییرات مسافت نسبت به زمان می‌باشد داریم:

سرعت متوسط $\quad \frac{s(۲)-s(۰)}{۲-۰} = \frac{۵۰-۰}{۲} = ۲۵\ m/s$

سرعت لحظه‌ای $\quad v(t) = s'(t) = ۳t^۲ + ۱۲t + ۹ \rightarrow v(۲) = ۴۵\ m/s$

مثال ۴: سرعت یک اتومبیل که از حال سکون بر روی یک خط راست شروع به حرکت کرده از تابع $v(t) = \frac{۱۲t}{t+۲}\ m/s$ پیروی می‌کند. شتاب متوسط را در فاصله زمانی $[۲,۳]$ و شتاب لحظه‌ای را در $t = ۳$ بیابید.

حل:

شتاب متوسط $\quad \frac{v(۳)-v(۲)}{۳-۲} = \frac{۱۲\times۳}{۵} - \frac{۱۲\times۲}{۴} = \frac{۶}{۵} = ۱/۲\ \ m/s^۲$

شتاب لحظه‌ای $\quad a(t) = v'(t) = \frac{۲۴}{(t+۲)^۲} \rightarrow a(۳) = \frac{۲۴}{۲۵}\ m/s^۲$

مثال ۵: هرگاه جرم یک میله فلزی در نقاط مختلف آن ناهمگن بوده و جرم آن از نقطه انتهایی چپ تا نقطه‌ای مانند x از رابطه $m = f(x) = \sqrt{x}$ به‌دست آید، چگالی متوسط قسمتی از میله که $۱/۲ \leq x \leq ۱$ باشد را محاسبه کنید. هم‌چنین چگالی لحظه‌ای در $x = ۱$ را بیابید (x برحسب سانتی‌متر و m برحسب گرم فرض شود).

حل:

چگالی متوسط $\quad \frac{f(۱/۲)-f(۱)}{۱/۲-۱} = \frac{\sqrt{۱/۲}-۱}{۰/۲} = ۰/۴۸\ gr/cm$

چگالی لحظه‌ای $\quad \rho(x) = f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \rightarrow \rho(۱) = \frac{۱}{۲} = ۰/۵\ gr/cm$

مثال ۶: مقدار بار Q برحسب کولن که از سطحی در زمان t می‌گذرد توسط $Q(t) = t^۳ - ۲t^۲ + ۶t + ۲$ مشخص می‌شود. جریان را در لحظه‌های $t = ۱$ و $t = ۲$ بیابید (t برحسب ثانیه فرض شود).

حل: با توجه به اینکه جریان، میزان تغییرات بار الکتریکی نسبت به زمان است بنابراین داریم:

$$I(t) = Q'(t) = ۳t^۲ - ۴t + ۶$$

$$I(۱) = ۳ - ۴ + ۶ = ۵ \qquad , \qquad I(۲) = ۱۲ - ۸ + ۶ = ۱۰$$

واحد جریان آمپر نامیده می‌شود (یک آمپر یک کولن بر ثانیه است).

مثال ۷: حجم یک سلول کروی در حال رشد برابر $v = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ می‌باشد. میزان متوسط تغییر v نسبت به r، وقتی r از ۵ به ۸ تغییر می‌کند را بیابید. هم‌چنین میزان لحظه‌ای تغییر v نسبت به r را در لحظه $r = ۶$ محاسبه کنید (در این مسئله واحد طول میکرومتر می‌باشد، هر میکرومتر برابر $۱۰^{-۶}$ متر است).

حل:

میزان تغییرات متوسط $\quad \frac{v(۸)-v(۵)}{۸-۵} = \frac{۴\pi}{۹}(۸^۳ - ۵^۳) = ۱۷۲\,\pi$

میزان تغییرات لحظه‌ای $\quad v'(r) = ۴\pi r^۲ \rightarrow v'(۶) = ۴\pi(۳۶) = ۱۴۴\,\pi$

نکته: اقتصاددانان و صاحبان شرکت‌ها علاقه دارند که بدانند، تغییر در برخی از متغیرها مانند موجودی، تولید، ذخیره، تبلیغ و قیمت، چگونه روی متغیرهای دیگری مانند تقاضا، فروش، سود، تورم و حتی بیکاری اثر می‌گذارد. برای این منظور با فرض اینکه x مقدار محصول باشد، تابع‌های مهم زیر تعریف می‌شود:

الف) $C(x)$ تابع هزینه تولید، $R(x)$ تابع درآمد حاصل از فروش و $P(x)$ تابع سود حاصل از فروش و همواره داریم: $P(x) = R(x) - C(x)$

ب) تابع‌های هزینه متوسط، درآمد متوسط و سود متوسط هر واحد محصول را از رابطه‌های $\frac{C(x)}{x}$ ، $\frac{R(x)}{x}$ و $\frac{P(x)}{x}$ به‌دست می‌آورند.

ج) برای یافتن تابع‌های هزینه لحظه‌ای، درآمد لحظه‌ای و سود لحظه‌ای به ترتیب $C'(x)$ ، $R'(x)$ و $P'(x)$ را محاسبه می‌کنند. در رشته اقتصاد به جای واژه لحظه‌ای معمولاً از واژه نهایی یا حاشیه‌ای استفاده می‌شود[1].

تذکر: لفظ متوسط در رشته اقتصاد با میزان متوسط که در این بخش بیان شد کمی متفاوت است. با فرض اینکه $C(x)$ تابع هزینه x محصول باشد، با مقایسه عبارت‌های زیر این تفاوت مشخص می‌شود:

هزینه متوسط x محصول: $\frac{C(x)}{x}$

میزان متوسط تغییرات هزینه نسبت به تغییرات محصول: $\frac{C(x_2)-C(x_1)}{x_2-x_1}$

در مثال بعد با تعبیر هزینه متوسط و هزینه نهایی آشنا می‌شوید.

۱- هرگاه تابع‌های هزینه نهایی، درآمد نهایی و سود نهایی را داشته باشیم با عمل عکس مشتق‌گیری، می‌توان تابع‌های هزینه، درآمد و سود را به‌دست آورد. این عمل جدید، عمل انتگرال‌گیری نام دارد و در فصل پنجم همین کتاب معرفی می‌شود.

مثال ۸: هزینه یک شرکت برحسب تومان برای تولید x کیلوگرم ماده A در روز برابر $C(x) = ۲۰۰۰ + ۴x + ۰/۰۱x^۲$ می‌باشد. بنابراین هزینه متوسط برای تولید ۵۰۰ کیلوگرم ماده A در روز، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{C(۵۰۰)}{۵۰۰} = \frac{۲۰۰۰+۴(۵۰۰)+۰/۰۱(۵۰۰)^۲}{۵۰۰} = ۱۳$$

همچنین هزینه نهایی در تولید ۵۰۰ کیلوگرم ماده A عبارت است از:

$$C'(x) = ۴ + ۰/۰۲x \rightarrow C'(۵۰۰) = ۱۴$$

تعبیر مطالب فوق این است که اگر شرکت روزانه ۵۰۰ کیلوگرم ماده A تولید کند هر کیلو ۱۳ تومان هزینه دارد و اگر تصمیم بگیرد یک کیلو ماده A بیشتر تولید کند این یک کیلو تقریباً ۱۴ تومان هزینه دارد. هزینه واقعی تولید پانصد و یکمین کیلوگرم ماده A برابر است با: $C(۵۰۱) - C(۵۰۰) = ۶۵۱۴/۰۱ - ۶۵۰۰ = ۱۴/۰۱$

تذکر: اگر در مثال قبل به جای x کیلوگرم ماده A ، x عدد کالای A را مطرح می‌کردیم دیگر تابع $C(x)$ پیوسته نبود و نمی‌توانستیم از مشتق‌گیری برای پاسخ مسئله استفاده کنیم. در این نوع مسائل با فرض اینکه دامنه تابع $\mathbb{R}$ است، معمولاً تابع پیوسته و مشتق‌پذیر خواهد بود. لذا می‌توان از مشتق برای یافتن جواب مسئله استفاده کرد. پس از به‌دست آوردن جواب، اگر عدد حاصل غیر صحیح بود، جزء صحیح آن عدد را در نظر می‌گیریم و یا آن را به یک عدد صحیح گرد می‌کنیم.

نکته: مثال‌هایی که در این بخش مطرح شد، تعبیرهای متفاوت از یک مفهوم مجرد ریاضی، به نام مشتق بود. روش ریاضیات این است که مفاهیم مجرد را مورد بررسی قرار داده و خاصیت‌های آن را به‌دست می‌آورد؛ سپس این مفاهیم و خاصیت‌های آن را برای استفاده در مسائل کاربردی، در اختیار رشته‌های مختلف علوم قرار می‌دهد.

تمرین

۱- مقدار خواسته شده در عبارت‌های زیر را بیابید.

۱) میزان لحظه‌ای تغییر مساحت یک دایره به شعاع آن

۲) میزان لحظه‌ای تغییر سطح کل یک مکعب به یال آن

۳) میزان لحظه‌ای تغییر مساحت مستطیلی که طول آن سه برابر عرض است نسبت به عرض آن

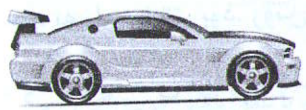
۴) میزان لحظه‌ای تغییر حجم مخروطی که شعاع قاعده آن نصف ارتفاع است نسبت به ارتفاع آن

۵) میزان لحظه‌ای تغییر حجم مکعب نسبت به سطح کل آن

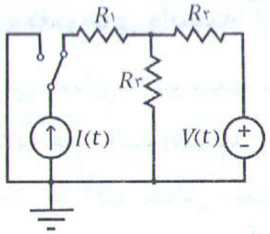
۶) میزان لحظه‌ای تغییر حجم یک کره نسبت به سطح آن

۲- یک بادکنک کروی در حال باد شدن است. میزان متوسط تغییر سطح بادکنک هنگامی‌که شعاع از ۳ سانتی‌متر به ۵ سانتی‌متر تغییر می‌کند را بیابید. هم‌چنین میزان لحظه‌ای تغییر سطح به شعاع، هنگامی که شعاع ۵ سانتی‌متر است را محاسبه کنید.

۳- در اثر حرارت، یک گلوله برفی در حال ذوب شدن است. اگر در فاصله t دقیقه از مبدا زمان شعاع آن برابر $r = ۴ - ۰/۰۴t$ سانتی‌متر باشد، میزان لحظه‌ای تغییر حجم نسبت به زمان را در $t = ۶۰$ بیابید.

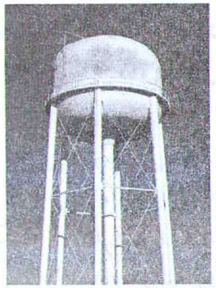


۴- فاصله یک متحرک برحسب متر از مبدا مختصات، t ثانیه پس از شروع حرکت از رابطه $s(t) = \frac{۱}{۲}t^۲ + \frac{۴t}{t+۱}$ به‌دست می‌آید. فاصله تا مبدا، سرعت و شتاب این متحرک را در لحظه $t = ۱$ بیابید.



۵- مقدار بار الکتریکی برحسب کولن که از سطحی در زمان t ثانیه می‌گذرد توسط $Q(t) = t^۳ - ۲t^۲ + t + ۱$ اندازه‌گیری می‌شود. جریان را در لحظه $t = ۲$ بیابید.

۶- اگر مخزنی گنجایش ۵۰۰ لیتر آب داشته باشد و شیر مخزن را به گونه‌ای باز کنیم که در مدت ۴۰ دقیقه بتوان آن را کاملاً تخلیه کرد، طبق قانونی در فیزیک مقدار حجم آب باقی‌مانده در مخزن پس از t دقیقه برابر $V = ۵۰۰(۱ - \frac{t}{۴۰})^۲$ است. سرعت خروج آب از مخزن (یا سرعت کاهش حجم آب مخزن) را در ۱۰ دقیقه پس از باز کردن شیر محاسبه کنید.



۷- تعداد ۱۰۰ باکتری را در یک آزمایشگاه کشت می‌دهیم. جمعیت آنها پس از t دقیقه از رابطه $f(t) = ۱۰۰e^{۰/۱۴t}$ پیروی می‌کند. رشد متوسط باکتری‌ها را در فاصله زمانی $t = ۰$ و $t = ۲۰$ و رشد لحظه‌ای را در $t = ۲۰$ محاسبه کنید.

۸- در یک کارخانه تولید x عروسک برابر $C(x) = ۵۰۰۰ + ۲۰۰x + ۰/۰۵x^۲$ تومان هزینه دارد.

الف) هزینه متوسط تولید ۱۰۰ عروسک را بیابید.

ب) هزینه نهایی را در $x = ۱۰۰$ بیابید.

ج) تحلیل اقتصادی اعداد به‌دست آمده در قسمت الف و ب چیست؟

۴-۳ متغیرهای وابسته[1]

در بعضی مسائل، چند متغیر مانند x ، y ، z ، ... به وسیله یک معادله (تابع صریح یا تابع ضمنی) به هم وابسته هستند و هر یک از این متغیرها، تابعی از متغیر دیگر مانند t می‌باشند. در اکثر مسائل متغیر t ، زمان است. میزان تغییرات لحظه‌ای هر یک از این متغیرها نسبت به t یعنی $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ ، $\frac{dz}{dt}$ ، ... را با توجه به اطلاعاتی که داده شده می‌توانیم مورد بررسی قرار دهیم. برای این منظور از طرفین معادله نسبت به t مشتق می‌گیریم، در بسیاری از موارد، مشتق‌گیری از نوع مشتق تابع مرکب می‌باشد. مثال‌های زیر نمونه‌هایی از این نوع مسائل می‌باشند.

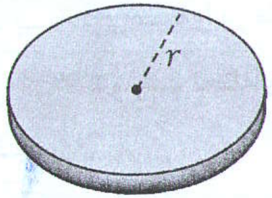
مثال ۱: فرض کنید x و y توابعی از متغیر t و داشته باشیم: $2\sin x + 4\cos y = 3$ و $\frac{dy}{dt} = 3$. مقدار $\frac{dx}{dt}$ را در لحظه $(x,y) = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ محاسبه کنید.

حل: از طرفین رابطه نسبت به t مشتق می‌گیریم، بنابر قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$2\cos x \frac{dx}{dt} - 4\sin y \frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow 2(\cos\frac{\pi}{6})\frac{dx}{dt} - 4(\sin\frac{\pi}{3})(3) = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{3}\frac{dx}{dt} - 6\sqrt{3} = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = 6$$

مثال ۲: وقتی یک صفحه فلزی به شکل دایره را در کوره گرم می‌کنیم، شعاع آن با سرعت ۰/۰۱ سانتی‌متر بر ثانیه زیاد می‌شود. وقتی شعاع ۵۰ سانتی‌متر است، مساحت صفحه با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟



حل: هرگاه زمان را با t و شعاع را با r و مساحت دایره را با s نمایش دهیم، داریم:

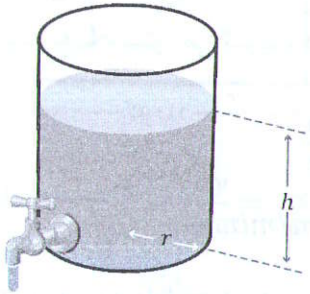
$$s = \pi r^2 \quad , \quad \frac{dr}{dt} = 0/01\ cm/s \quad , \quad r_0 = 50 \quad , \quad \frac{ds}{dt} = ?$$

۱- بعضی از مؤلفین این بخش را تحت عنوان‌های دیگری مانند میزان‌های مرتبط، نرخ‌های مرتبط، کمیت‌های وابسته و یا آهنگ‌های تغییر وابسته ارائه کرده‌اند.

چون r و s توابعی از t هستند، از طرفین رابطه $s = \pi r^2$ نسبت به t مشتق می‌گیریم، داریم:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dr}\frac{dr}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{ds}{dt} = 2\pi(50)(0/01) = \pi\ cm^2/s$$

مثال ۳: فرض کنید آب با سرعت ۳ متر مکعب بر ثانیه از یک مخزن استوانه‌ای با شعاع قاعده یک متر، خارج می‌شود. سرعت پایین آمدن ارتفاع آب را محاسبه کنید.



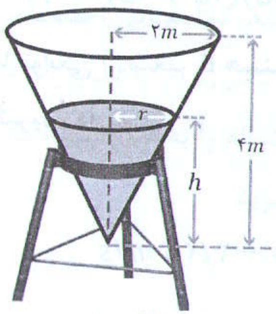
حل: هرگاه حجم استوانه را با v ، شعاع قاعده را با r و ارتفاع استوانه را با h نمایش دهیم، داریم:

$$v = \pi r^2 h \quad , \quad \frac{dv}{dt} = -3\ m^3/s \quad , \quad r = 1 \quad , \quad \frac{dh}{dt} = ?$$

h و v توابعی از متغیر t می‌باشند. از طرفین رابطه $v = \pi r^2 h$ نسبت به t مشتق می‌گیریم، با توجه به ثابت بودن r داریم:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\frac{dh}{dt} = \pi r^2\frac{dh}{dt} \rightarrow -3 = \pi(1)^2\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-3}{\pi} = -0/95\ m/s$$

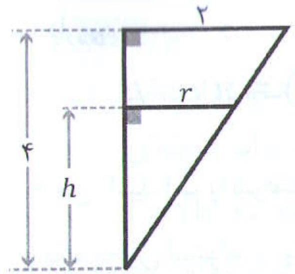
مثال ۴: مخزن آبی به شکل مخروط دوار وارونه با شعاع قاعده ۲ متر و ارتفاع ۴ متر می‌باشد. اگر آب با سرعت $2\ m^3/min$ به داخل مخزن وارد شود، سرعت بالا آمدن ارتفاع آب در مخزن هنگامی که عمق آب ۳ متر باشد را به‌دست آورید.



حل: فرض کنیم v ، r ، h به ترتیب حجم آب، شعاع قاعده و ارتفاع آب در زمان t باشند، که در آن t برحسب دقیقه اندازه‌گیری می‌شود، داریم:

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad , \quad \frac{dv}{dt} = 2m^3/min \quad , \quad h_0 = 3m \quad , \quad \frac{dh}{dt} = ?$$

در فرمول حجم، دو متغیر h و r وجود دارد که می‌توان r را به کمک رابطه تالس، برحسب h بیان کرد: $\frac{r}{۲} = \frac{h}{۴} \rightarrow r = \frac{h}{۲}$



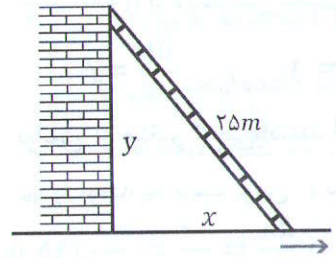
بنابراین داریم: $v = \frac{۱}{۳}\pi(\frac{h}{۲})^۲ h \rightarrow v = \frac{\pi}{۱۲}h^۳$

h و v توابعی از متغیر t هستند، از طرفین رابطه اخیر نسبت به t مشتق می‌گیریم، داریم:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{۱۲}(۳h^۲)\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{۴}h^۲\frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow ۲ = \frac{\pi}{۴}(۳)^۲\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{۸}{۹\pi} = ۰/۲۸\ m/min$$

مثال ۵: نردبانی به طول ۲۵ متر به دیواری قائم تکیه دارد. اگر پای نردبان با سرعت $۳\ m/s$ به‌طور افقی از دیوار دور شود، وقتی نردبان ۱۵ متر از دیوار دور شده باشد، سر نردبان با چه سرعتی به طرف پایین می‌لغزد؟



حل: با توجه به شکل فوق و به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$x^۲ + y^۲ = ۲۵^۲ \quad , \quad \frac{dx}{dt} = ۳\ m/s \quad , \quad x_. = ۱۵m \quad , \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

$$x^۲ + y^۲ = ۲۵^۲ \rightarrow y = \sqrt{۲۵^۲ - x^۲}$$

$$y_. = \sqrt{۲۵^۲ - x_.^۲} = \sqrt{۲۵^۲ - ۱۵^۲} = \sqrt{(۲۵-۱۵)(۲۵+۱۵)} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰$$

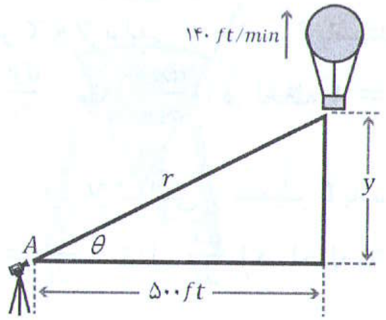
چون x و y توابعی از متغیر t هستند از طرفین رابطه $x^۲ + y^۲ = ۲۵^۲$ نسبت به t مشتق می‌گیریم، داریم:

$$۲x\frac{dx}{dt} + ۲y\frac{dy}{dt} = ۰ \rightarrow x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = ۰$$

$$\rightarrow (۱۵)(۳) + (۲۰)\frac{dy}{dt} = ۰ \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-۴۵}{۲۰} = -۲/۲۵\ m/s$$

تعبیر علامت منفی آن است که y با افزایش t، کاهش می‌یابد.

مثال ۶: یک بالن از سطح زمین به سمت بالا می‌رود و مکان آن توسط یک دوربین تحت نظر است. فاصله دوربین از نقطه حرکت ۵۰۰ فوت[1] می‌باشد. وقتی بالن به ارتفاع ۵۰۰ فوتی رسیده و با سرعت ۱۴۰ فوت بر دقیقه حرکت می‌کند، سرعت تغییر زاویه دوربین را به‌دست آورید.



حل: مطابق شکل داریم:

$$\tan\theta = \frac{y}{۵۰۰} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = ۱۴۰\ ft/min \quad , \quad y_. = ۵۰۰ \quad , \quad \frac{d\theta}{dt} = ?$$

چون θ و y توابعی از t هستند از طرفین رابطه $\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{y}{۵۰۰}\right)$ نسبت به t مشتق می‌گیریم، داریم:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{۱}{۵۰۰}\frac{dy}{dt}}{۱+\left(\frac{y}{۵۰۰}\right)^۲} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{۱}{۵۰۰}(۱۴۰)}{۱+\left(\frac{۵۰۰}{۵۰۰}\right)^۲} = \frac{\frac{۱۴۰}{۵۰۰}}{۲} = \frac{۱۴۰}{۱۰۰۰} = \frac{۷}{۵۰}\ rad/min$$

یعنی زاویه دوربین در لحظه $y_. = ۵۰۰$ با سرعت $\frac{۷}{۵۰}$ رادیان بر دقیقه تغییر می‌کند.

نکته: با توجه به تجربه‌های کسب شده در مثال‌های قبل، برای حل مسائل متغیرهای وابسته، رعایت گام‌های زیر مفید می‌باشد:

۱) مسأله را چند بار با دقت زیاد بخوانید.

۲) در صورت امکان، شکلی برای آن رسم کنید.

۳) به تمام متغیرهایی که تابعی از متغیر زمان هستند، نمادهایی اختصاص دهید و اطلاعات مسئله را به زبان ریاضی بنویسید (معمولاً متغیر زمان را با t نمایش می‌دهند).

۴) به دنبال معادله‌ای باشید که متغیرهای مختلف مسأله را به هم وابسته کند.

۵) از طرفین معادله نسبت به متغیر زمان مشتق بگیرید.

۶) با حل معادله جدید، مجهول را بیابید.

۱- فوت یا پا، واحدی برای اندازه‌گیری طول بوده و برابر ۱۲ اینچ یا تقریبا ۳۰/۴۸ سانتیمتر می‌باشد.

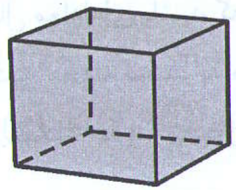
تمرین

۱- اگر x و y توابعی از متغیر t باشند و داشته باشیم: $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ و $\frac{dy}{dt} = 4$ ، مقدار $\frac{dx}{dt}$ را در لحظه $y = 1$ و $x < 0$ به‌دست آورید.

۲- اگر x و y توابعی از متغیر t باشند و داشته باشیم: $y(\sin x + 1) = 4$ و $\frac{dy}{dt} = -4$ ، مقدار $\frac{dx}{dt}$ را در لحظه $x = \pi$ به‌دست آورید.

۳- در اثر نشت نفت از یک کشتی به دریا، در اطراف کشتی یک لکه نفتی به شکل دایره ایجاد شده است. اگر شعاع این لکه نفتی با سرعت $5\ m/s$ در حال افزایش باشد در لحظه‌ای که شعاع لکه برابر $40m$ است سطح این لکه با چه سرعتی افزایش می‌یابد.

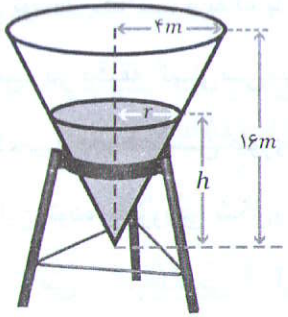
۴- شعاع یک بالن کروی با سرعت $0/5\ m/s$ در حال افزایش است. میزان تغییر حجم و سطح بالن نسبت به زمان را هنگامی که حجم بالن برابر $36\pi\ m^3$ باشد، بیابید.



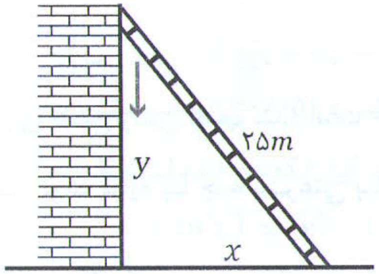
۵- اگر در اثر حرارت یال‌های یک مکعب با سرعت $0/2\ cm/s$ در حال افزایش باشند در لحظه‌ای که یال مکعب ۱۰ سانتی‌متر شده، مطلوب است:

الف) میزان لحظه‌ای تغییر حجم نسبت به زمان

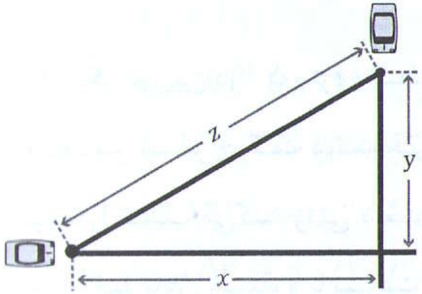
ب) میزان لحظه‌ای تغییر سطح کل نسبت به زمان



۶- مخزن آبی به شکل مخروط وارونه با شعاع قاعده ۴ متر و ارتفاع ۱۶ متر می‌باشد. اگر آب با سرعت $3\ m^3/min$ وارد مخزن شود وقتی شعاع سطح آب ۲ متر است، شعاع سطح آب با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟



۷- نردبانی به طول ۲۵ متر را به دیوار قائم تکیه داده‌ایم. اگر سر نردبان با سرعت $4\ m/s$ به سمت پایین بلغزد هنگامی که فاصله سر نردبان تا زمین ۲۰ متر است، پای نردبان با چه سرعتی از دیوار دور می‌شود؟



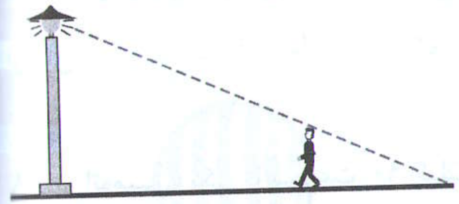
۸- دو اتومبیل، یکی با سرعت ۹۰ کیلومتر بر ساعت از غرب به شرق و دیگری با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت از شمال به جنوب به محل تقاطع دو جاده نزدیک می‌شوند. در لحظه‌ای که فاصله اتومبیل اول تا محل تقاطع ۲۰۰ متر و فاصله اتومبیل دیگر تا محل تقاطع ۱۵۰ متر است، دو اتومبیل با چه سرعتی به یکدیگر نزدیک می‌شوند؟

۹- شن توسط یک تسمه نقاله با سرعت ۲۰ متر مکعب در دقیقه انبار می‌شود. نیروی اصطکاک بین دانه‌های شن طوری است که ارتفاع این توده مخروطی شکل، همواره برابر قطر قاعده می‌باشد. هنگامی که ارتفاع توده ۱۰ متر است، ارتفاع توده با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟

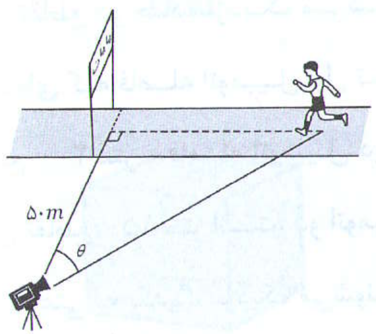
۱۰- مردی با قد ۱/۵ متر با سرعت ۱/۲۵ متر بر ثانیه به طرف چراغی که در ارتفاع ۴ متری سطح زمین نصب شده است حرکت می‌کند.

الف) نوک سایه با چه سرعتی به شخص نزدیک می‌شود و یا به عبارت دیگر تغییرات طول سایه نسبت به زمان چقدر است.

ب) نوک سایه با چه سرعتی به تیر چراغ نزدیک می‌شود.



۱۱- یک دوربین در ۵۰ متری خط پایان و عمود بر مسیر حرکت دونده قرار دارد و دونده را تعقیب می‌کند. وقتی دونده به ۵۰ متری خط پایان رسیده و با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه می‌دود، سرعت تغییر زاویه دوربین را محاسبه کنید.



۴-۲ خطا، تقریب، دیفرانسیل

فرض کنید تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = x_۰$ مشتق‌پذیر باشد. بنابراین داریم:

$$f'(x_۰) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x_۰+\Delta x)-f(x_۰)}{\Delta x} \quad \text{یا} \quad f'(x_۰) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

هرگاه مقدار Δx بسیار کوچک باشد می‌توان تقریب زیر را در نظر گرفت:

$$f'(x_۰) \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} \to \boxed{\Delta y \cong f'(x_۰)\Delta x}$$

هم‌چنین می‌توان نوشت:

$$f(x_۰ + \Delta x) - f(x_۰) \cong f'(x_۰)\Delta x \to \boxed{f(x_۰ + \Delta x) \cong f'(x_۰)\Delta x + f(x_۰)}$$

از فرمول‌های فوق برای محاسبه خطا و یا محاسبه مقدار تقریبی بعضی از عبارت‌های عددی استفاده می‌شود.

مثال ۱: اندازه یال مکعبی با احتمال خطای اندازه‌گیری $\pm ۰/۰۵$ سانتی‌متر، برابر ۶۰ سانتی‌متر است. مقدار تقریبی خطا در محاسبه حجم این مکعب را محاسبه کنید.

حل: اگر x یال مکعب باشد حجم مکعب برابر $v(x) = x^۳$ است. با فرض $x_۰ = ۶۰$ و $\Delta x = \pm ۰/۰۵$ داریم:

$$\Delta v \cong v'(x_۰)\Delta x \ , \ v'(x) = ۳x^۲$$

$$\Delta v \cong ۳(۶۰)^۲(\pm ۰/۰۵) = \pm ۵۴۰ \ cm^۳$$

یعنی با احتمال خطای حداکثر $\pm ۰/۰۵$ سانتی‌متر در محاسبه طول یال، حجم مکعب حداکثر ۵۴۰ سانتی‌متر مکعب بیشتر یا کمتر از مقدار واقعی خواهد بود.

مثال ۲: اگر زمین به شکل کره کامل و شعاع آن برابر ۳۹۵۹ مایل[1] باشد. مقدار $\pm ۰/۱$ مایل خطا در اندازه‌گیری شعاع، در برآورد مساحت کره زمین چه اثری دارد؟

حل: اگر شعاع کره زمین را r در نظر بگیریم سطح کره از رابطه $S = ۴\pi r^۲$ به‌دست می‌آید و داریم: $S'(r) = ۸\pi r$. با فرض $r_۰ = ۳۹۵۹$ و $\Delta r = \pm ۰/۱$ می‌توان نوشت:

$$\Delta S \cong S'(r_۰)\Delta r \to \Delta S \cong ۸\pi(۳۹۵۹)(\pm ۰/۱) = \pm ۹۹۵۰$$

یعنی سطح کره زمین از مقدار واقعی آن، حداکثر ۹۹۵۰ مایل مربع، بیشتر یا کمتر برآورد شده است.

۱- مایل واحدی برای اندازه‌گیری طول بوده و برابر با ۵۲۸۰ فوت یا تقریباً ۱/۶ کیلومتر است.

مثال ۳: در یک توپ شعاع داخلی ۵ سانتی‌متر و ضخامت آن $\frac{۱}{۱۶}$ سانتی‌متر است. مقدار تقریبی حجم موادی که در ساخت این توپ به کار رفته است را بیابید.

حل: هرگاه r شعاع و v حجم کره باشد، داریم:

$$v = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \rightarrow v'(r) = ۴\pi r^۲$$

با فرض $\Delta r = \frac{۱}{۱۶}$ و $r_. = ۵$، Δv حجم تقریبی پوسته این توپ می‌باشد.

$$\Delta v \cong v'(r_.)\Delta r \rightarrow \Delta v \cong ۴\pi(۵)^۲(\frac{۱}{۱۶}) = \frac{۲۵\pi}{۴} = ۱۹/۶۳\ cm^۳$$

حجم واقعی پوسته این توپ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$v(۵ + \frac{۱}{۱۶}) - v(۵) = \frac{۴\pi}{۳}\left[(۵ + \frac{۱}{۱۶})^۳ - ۵^۳\right] = ۱۹/۸۸\ cm^۳$$

مثال ۴: مقدار تقریبی $\sqrt{۲۶}$ را بیابید.

حل: تابع $f(x) = \sqrt{x}$ رادر نظر می‌گیریم، داریم: $f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ نزدیک‌ترین عدد مربع کامل به ۲۶، عدد ۲۵ می‌باشد، لذا با فرض $x_. = ۲۵$ و $\Delta x = ۱$ و با استفاده از فرمول تقریب داریم:

$$f(x_. + \Delta x) \cong f(x_.) + f'(x_.)\Delta x$$

$$f(۲۵ + ۱) \cong f(۲۵) + f'(۲۵)(۱)$$

$$\sqrt{۲۶} \cong \sqrt{۲۵} + \frac{۱}{۲\sqrt{۲۵}}(۱) \rightarrow \sqrt{۲۶} \cong ۵ + \frac{۱}{۱۰} = ۵/۱$$

مثال ۵: مقدار تقریبی $\sqrt[۳]{۲۸/۲}$ را بیابید.

حل: تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ را در نظر می‌گیریم، داریم: $f'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$ نزدیکترین عدد مکعب کامل به ۲۸/۲ عدد ۲۷ می‌باشد. با فرض $x_. = ۲۷$ و $\Delta x = ۱/۲$ و با استفاده از فرمول تقریب داریم:

$$f(x_. + \Delta x) \cong f(x_.) + f'(x_.)\Delta x$$

$$f(۲۷ + ۱/۲) \cong f(۲۷) + f'(۲۷)(۱/۲)$$

$$\sqrt[۳]{۲۸/۲} \cong \sqrt[۳]{۲۷} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۲۷^۲}}(۱/۲) \rightarrow \sqrt[۳]{۲۸/۲} \cong ۳ + \frac{۱/۲}{۲۷} = ۳ + \frac{۲}{۴۵} = ۳/۰۴۴$$

این مقدار را با $\sqrt[۳]{۲۸/۲} = ۳/۰۴۳$ که با ماشین حساب محاسبه شده مقایسه کنید. مشاهده می‌کنید دقت محاسبه تا دو رقم اعشار می‌باشد.

نکته: عبارت $f(x_. + \Delta x) \cong f(x_.) + f'(x_.)\Delta x$ در واقع به صورت $f'(x_.) \cong \frac{f(x_. + \Delta x) - f(x_.)}{\Delta x}$ بوده است. فرض کنید f یک تابع مثلثاتی است. پس صورت کسر طرف اول عددی حقیقی برحسب واحد طول می‌باشد، لذا مخرج هم باید عددی حقیقی برحسب واحد طول باشد. بنابراین هرگاه Δx برحسب درجه باشد باید آن را برحسب رادیان بنویسیم؛ زیرا رادیان واحدی برای اندازه‌گیری زاویه برحسب واحد طول می‌باشد.

مثال ۶: مقدار تقریبی $\cos ۵۹^\circ$ را بیابید.

حل: تابع $f(x) = \cos x$ را در نظر می‌گیریم، داریم: $f'(x) = -\sin x$

نزدیک‌ترین زاویه به زاویه ۵۹° که کسینوس آن را می‌شناسیم زاویه ۶۰° می‌باشد. لذا فرض می‌کنیم: $x_. = ۶۰^\circ$ و $\Delta x = -۱^\circ = \frac{-\pi}{۱۸۰}\ Rad$. با استفاده از فرمول تقریب داریم:

$$f(x_. + \Delta x) \cong f(x_.) + f'(x_.)\Delta x \rightarrow f(۶۰^\circ - ۱^\circ) \cong f(۶۰^\circ) + f'(۶۰^\circ)(\frac{-\pi}{۱۸۰})$$

$$\cos ۵۹^\circ \cong \cos ۶۰^\circ + (-\sin ۶۰^\circ)(\frac{-\pi}{۱۸۰}) \rightarrow \cos ۵۹^\circ \cong \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۰/۵۱۵۱$$

مقدار فوق با ماشین حساب معمولی محاسبه شده است. اگر عبارت $\cos ۵۹^\circ$ را با ماشین حساب علمی محاسبه کنیم داریم: $\cos ۵۹^\circ = ۰/۵۱۵۰$، یعنی مقدار به‌دست آمده تا سه رقم اعشار صحیح می‌باشد.

تذکر: پس از این بحث به‌طور طبیعی این سوال در ذهن پدید می‌آید که **«آیا با وجود ماشین‌های حساب و نرم‌افزارهای ریاضی که با دقت بسیار بالا هر عبارت را محاسبه می‌کنند، استفاده از تقریب به کمک مشتق بیهوده نیست؟»** در پاسخ این سوال باید گفت استفاده از مشتق برای تقریب و یا محاسبه خطا، تقریباً منسوخ شده و کسی از آن استفاده نمی‌کند. ولی بعضی از مباحث در ریاضی جنبه آموزشی دارد، زنده نگه داشتن ایده کاربرد مشتق در محاسبه مقادیر تقریبی، در آموزش ریاضیات بسیار ارزشمند است، ضمن اینکه این بحث میدانی برای کسب مهارت بیشتر در اعمال ریاضی و موقعیتی برای تمرین خوب فکر کردن می‌باشد. برای رسیدن به مراحل تکامل در ریاضی، ناچاریم از بعضی مسیرها، گردنه‌ها و دره‌ها عبور کنیم.

مشابه این سوال را برای بسیاری از مباحث دیگر ریاضی نیز می‌توان مطرح کرد. پاسخ این سوال را در پاسخ به سوال زیر می‌توانید جستجو کنید: **«با دسترس بودن ماشین‌های حساب، آیا تدریس اعمال چهارگانه در دوره ابتدایی ضرورت دارد؟»**

تعریف ۱: با نماد $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ برای مشتق تابع $y=f(x)$ آشنا هستید. می‌توان dx و dy را به عنوان نمادهای مستقل در نظر گرفت و نوشت: $dy=f'(x)\,dx$. این عبارت را **دیفرانسیل تابع f** می‌گویند و از آن در مباحث مختلف ریاضی استفاده می‌کنند.

مثال ۷: در زیر، دیفرانسیل چند تابع صریح و ضمنی محاسبه شده است.

۱) $y=t^{۲}+۵t \rightarrow dy=(۲t+۵)\,dt$

۲) $y=cos\,۳t \rightarrow dy=-۳\,sin\,۳t\,dt$

۳) $y=sin^{۲}x \rightarrow dy=۲\,sin\,x\,cos\,x\,dx$

۴) $u=e^{۵x-۲} \rightarrow du=۵e^{۵x-۲}\,dx$

۵) $u=Ln(x^{۲}-۳) \rightarrow du=\frac{۲x}{x^{۲}-۳}dx$

۶) $y=sin^{-۱}\,۲x \rightarrow dy=\frac{۲}{\sqrt{۱-۴x^{۲}}}dx$

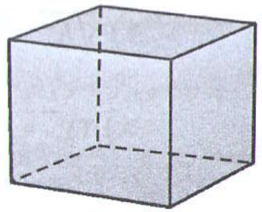
۷) $x^{۲}+۳xy=۵ \rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{۲x+۳y}{۳x} \rightarrow dy=-\frac{۲x+۳y}{۳x}dx$

۸) $sin(xy)+۲x-۳y=۱ \rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y\,cos(xy)+۲}{x\,cos(xy)-۳} \rightarrow dy=\frac{۲+y\,cos(xy)}{۳-x\,cos(xy)}dx$

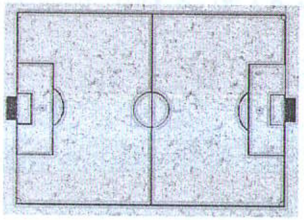
تذکر: دو عبارت $dy=f'(x)\,dx$ و $\Delta y\cong f'(x_.)\Delta x$ شباهت‌ها و تفاوت‌هایی با یکدیگر دارند که امکان بررسی آنها از دیدگاه ریاضیات محض در این کتاب فراهم نمی‌باشد. بسیاری از نویسندگان کتب ریاضی به خاطر این شباهت ظاهری و برای سهولت در استفاده از فرمول تقریب و اندازه‌گیری خطا، عبارت $\Delta y\cong f'(x_.)\Delta x$ را هم، دیفرانسیل تابع نامیده‌اند. ما هم از این به بعد، از این نام‌گذاری پیروی می‌کنیم.

تمرین

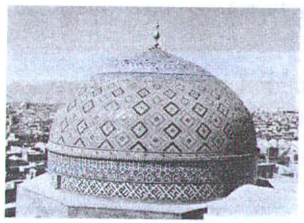
۱- اندازه یال مکعبی ۱۵ سانتی‌متر و خطای ممکن در اندازه‌گیری طول، $\pm ۰/۰۱$ سانتی‌متر است. با استفاده از دیفرانسیل، مقدار خطای تقریبی در محاسبه حجم و سطح کل این مکعب را بیابید.



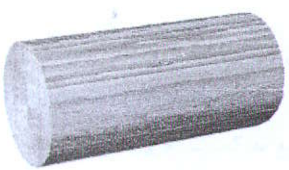
۲- طول یک زمین فوتبال، دو برابر عرض آن است. در اندازه‌گیری ابعاد این زمین احتمال ۲ سانتی‌متر خطا وجود دارد، هرگاه عرض زمین ۴۵ متر باشد مقدار خطای تقریبی در محاسبه مساحت زمین چقدر خواهد بود؟



۳- گنبد یک مسجد در حال ساخت به شکل نیم کره است، می‌خواهیم سطح گنبد را با ماده‌ای به ضخامت ۰/۵ سانتی‌متر بپوشانیم. اگر شعاع نیم کره ۴ متر باشد حجم تقریبی ماده لازم را به کمک دیفرانسیل بیابید.



۴- استوانه‌ای چوبی به شعاع ۲/۵سانتی‌متر و ارتفاع ۱۰ سانتی متر در دسترس می‌باشد. با تراشیدن سطح جانبی آن، شعاع قاعده به ۲/۳ سانتی‌متر کاهش می‌یابد. به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی حجم کاهش یافته از این استوانه چوبی را به‌دست آورید.



۵- مقدار تقریبی هر یک از عبارت‌های زیر را به کمک دیفرانسیل محاسبه کنید.

۱) $\sqrt{۰/۰۴۲}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۱۵}}$ ۳) $\sqrt[۳]{۰/۹۹۹}$ ۴) $\sqrt[۴]{۸۲}$

۵) $\tan ۴۶^\circ$ ۶) $\sin ۱۴۸^\circ$ ۷) $(۸/۳)^{\frac{۲}{۳}}$ ۸) $۳۳^{-\frac{۱}{۵}}$

۹) $e^{۰/۹۷}$ ۱۰) $Ln(۱/۰۵)$ ۱۱) $\tan^{-۱}(۱/۰۲)$ ۱۲) $\sec ۶۲^\circ$

۶- دیفرانسیل توابع صریح و ضمنی زیر را مشخص کنید.

۱) $y = \sqrt[۴]{x}$ ۲) $y = (x^۲ - ۲x)^۷$

۳) $y = \sin ۵t$ ۴) $y = \cos^۲ t$

۵) $y = \frac{x-۲}{x^۲}$ ۶) $y = x^۲ \sin x$

۷) $u = ۲^{۳x-۲}$ ۸) $u = \frac{Ln\, x}{x}$

۹) $y = \tan^{-۱} \sqrt{x}$ ۱۰) $y = x \sin^{-۱} x$

۱۱) $x^۲y + xy^۳ = ۵$ ۱۲) $\sin(۲x + ۳y) = x^۲y$

۴-۵ مشتق و حدهای مبهم

در محاسبات ریاضی گاه به حدهایی می‌رسیم که مقدار آنها در مجموعه گسترش یافته اعداد حقیقی مشخص نمی‌باشند و لذا به آنها مبهم می‌گوییم[1]. با بعضی از موارد مبهم و روش‌های رفع ابهام، در فصل حد و پیوستگی آشنا شدید. قضیه زیر به کمک مشتق، روش ساده دیگری را برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ معرفی می‌کند. این روش توسط یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) ریاضی‌دان سویسی کشف گردید و برای اولین بار یک ریاضی‌دان فرانسوی به نام لوپیتال (۱۶۶۱-۱۷۰۴) آن را در کتابش ذکر کرد، لذا این روش به قاعده لوپیتال معروف شد. در زبان فارسی معمولاً " $L'Hopital$ "، هوپیتال تلفظ می‌شود.

قضیه (قاعده هوپیتال): اگر توابع f و g در هر نقطه فاصله باز I شامل نقطه a مشتق‌پذیر و g' در هر نقطه این فاصله مخالف صفر باشد و داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = ۰ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

آنگاه داریم: $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(به عبارت دیگر اگر مقدار حد $\frac{۰}{۰}$ شود و شرایط قضیه برقرار باشد، داریم: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$)

تذکر:

۱- قاعده هوپیتال قابل تعمیم به حدهایی که به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ ظاهر می‌شوند نیز می‌باشد.

۲- در حدهای یک طرفه و حد در $\pm\infty$ که به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ ظاهر می‌شوند، قاعده هوپیتال قابل استفاده است.

۳- در محاسبه حد اگر لازم باشد می‌توان از قاعده هوپیتال بیش از یک بار استفاده کرد.

۱- کاربرد محاسبه حدهای مبهم را اولین بار هنگام پیدا کردن مشتق یک تابع به کمک تعریف آن، در فصل سوم مشاهده کردید. از جمله موارد دیگر، می‌توان به استفاده از این حدها در محاسبه مجانب‌ها برای رسم نمودار بعضی از توابع در بخش ۴-۸ و محاسبه بعضی از انتگرال‌های غیرعادی در بخش ۶-۳ همین کتاب، همچنین محاسبه تبدیلات لاپلاس و بررسی همگرایی و واگرایی بعضی از سری‌ها در فصل هشتم و نهم کتاب ریاضیات عمومی دو، اشاره کرد.

۴- حدهای مبهم $\infty - \infty$ و $\infty \times 0$ را می‌توان با یک سری عملیات جبری به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل و سپس به کمک قاعده هوپیتال رفع ابهام کرد.

مثال ۱: حدهای زیر به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آیند که به کمک قاعده هوپیتال رفع ابهام شده‌اند.

۱) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x+3}{2x-1} = 5$

۳) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{2} = \frac{3}{2}$

۴) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(Ln\,2)2^x}{2} = \frac{Ln\,2}{2}$

۵) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x\,Ln\,x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(Ln\,x)+1}{2x} = \frac{1}{2}$

۶) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$

مثال ۲: حدهای زیر به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ در می‌آیند که به کمک تعمیم قاعده هوپیتال رفع ابهام شده‌اند.

۱) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4x^2-5x+1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{8x-5}{2} = -\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3-2x+1}{x^4+4x+5} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2-2}{4x^3+4} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6x}{12x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$

۳) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3}{2}\sqrt[6]{\frac{x^4}{x^3}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3}{2}\sqrt[6]{x} = +\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{Ln\,x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2 = +\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x}{e^{3x}-1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x+2}{3e^{3x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{9e^{3x}} = 0$

۶) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{Ln\,3x}{Ln\,x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

مثال ۳: حدهای زیر به صورت $\infty - \infty$ می‌باشند، این حدها را چنان تغییر داده‌ایم که به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ درآیند، سپس به کمک قاعده هوپیتال رفع ابهام شده‌اند.

۱) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+1-2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x-x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x})$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$

مثال ۴: حدهای زیر به صورت $\infty \times 0$ می‌باشند، این حدها را چنان تغییر داده‌ایم که به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ درآیند، سپس به کمک قاعده هوپیتال رفع ابهام شده‌اند.

۱) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\,Ln\,x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{Ln\,x}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}x^2 = 0$

۲) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2xe^{1-x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (2x-\pi)\tan x = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\cot x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{-(1+\cot^2 x)} = \frac{2}{-1} = -2$

تذکر: قاعده هوپیتال با اینکه محاسبه بسیاری از حدهای مبهم را بسیار ساده می‌کند ولی به تنهایی برای بعضی از حدهای مبهم نمی‌تواند مفید باشد. به عنوان نمونه سه حد زیر مبهم بوده و مجاز به استفاده ازقاعده هوپیتال می‌باشید ولی هر چقدر از هوپیتال استفاده کنید مشاهده خواهید کرد که ابهام بر طرف نمی‌شود. بنابراین باید از روش‌های دیگری هم برای رفع ابهام استفاده شود.

۱) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ۲) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$ ۳) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

به عنوان نمونه برای حد سوم، باید تغییر متغیر $t = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید، آنگاه دارید:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t}$$

اکنون حد به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ در می‌آید که با قاعده هوپیتال، رفع ابهام می‌شود.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

رفع ابهام از سایر موارد مبهم: غیر از چهار حالت مبهم $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$، $\infty \times 0$ و $\infty - \infty$ سه حالت مبهم دیگر به صورت‌های 0^0، 1^∞ و ∞^0 وجود دارد. این موارد اغلب در حد توابعی به صورت $y = f(x)^{g(x)}$ ظاهر می‌شوند. برای رفع ابهام این نوع توابع از تابع لگاریتم طبیعی کمک می‌گیریم:

$$y = f(x)^{g(x)} \to Ln\, y = g(x)\, Ln(f(x))$$

مشابه عمل فوق را در بخش ۳-۳ هنگام توضیح روش مشتق‌گیری لگاریتمی مشاهده کرده‌اید. این عمل حد تابع $Ln\, y$ را به نوع $0 \times \infty$ هدایت می‌کند، سپس می‌توان حد را به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل و به کمک قاعده هوپیتال رفع ابهام کرد. مثال‌های زیر توضیحی برای این روش خواهد بود.

مثال ۵: مقدار حد $\lim_{x\to 0^+} x^x$ به صورت 0^0 در می‌آید، برای رفع ابهام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y = x^x \to Ln\, y = Ln\, x^x \to Ln\, y = x\, Ln\, x$$

$$\to \lim_{x\to 0^+} Ln\, y = \lim_{x\to 0^+} x\, Ln\, x = 0 \times (-\infty)$$

$$\to \lim_{x\to 0^+} Ln\, y = \lim_{x\to 0^+} \frac{Ln\, x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\to \lim_{x\to 0^+} Ln\, y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

$$\to \lim_{x\to 0^+} Ln\, y = Ln(\lim_{x\to 0^+} y) = 0 \to \lim_{x\to 0^+} y = 1 \to \lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

مثال ۶: مقدار $\lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ به صورت 1^∞ در می‌آید، برای رفع ابهام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y = (1 + \frac{1}{x})^x \to Ln\, y = Ln(1 + \frac{1}{x})^x \to Ln\, y = x\, Ln(1 + \frac{1}{x})$$

$$\to \lim_{x\to+\infty} Ln\, y = \lim_{x\to+\infty} x\, Ln(1 + \frac{1}{x}) = (+\infty) \times 0$$

$$\to \lim_{x\to+\infty} Ln\, y = \lim_{x\to+\infty} \frac{Ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

$$\to \lim_{x\to+\infty} Ln\, y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(-\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x}}}{(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$$\to \lim_{x\to+\infty} Ln\, y = Ln(\lim_{x\to+\infty} y) = 1 \to \lim_{x\to+\infty} y = e \to \boxed{\lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e}$$

مثال ۷: نشان دهید برای $a > 0$ داریم: $\lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = \lim_{x\to+\infty} \left[(1 + \frac{a}{x})^{\frac{x}{a}}\right]^a$$

با تغییر متغیر $t = \frac{x}{a}$ و با کمک از مثال ۶ داریم:

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[(1 + \frac{1}{t})^t\right]^a = \left[\lim_{t\to+\infty}(1 + \frac{1}{t})^t\right]^a = e^a$$

مثال ۸: مقدار حد $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{\sin x})^x$ به صورت ∞^0 در می‌آید، برای رفع ابهام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y = (\sin x)^{-x} \to Ln\, y = -x\, Ln(\sin x)$$

$$\to \lim_{x\to 0^+} Ln\, y = \lim_{x\to 0^+} (-x\, Ln(\sin x)) = 0 \times (-\infty)$$

$$\to \lim_{x\to 0^+} Ln\, y = \lim_{x\to 0^+} \frac{Ln(\sin x)}{-\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\to \lim_{x\to 0^+} Ln\, y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\to \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cos x - x^2 \sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\to \lim_{x\to 0^+} Ln\, y = Ln(\lim_{x\to 0^+} y) = 0 \to \lim_{x\to 0^+} y = 1 \to \lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{\sin x})^x = 1$$

تمرین

۱- با استفاده از قاعده هوپیتال حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{2x^2-x-1}$ ۲) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+27}{3x^2+9}$

۳) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-7}-3}$ ۴) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+3-\sqrt{x+2}}{\sqrt{3x+4}-1}$

۵) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(\pi x)}{2-x}$ ۶) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 3x-\cos 3x+1}$

۷) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$ ۸) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^{4x}-1}$

۹) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\, \ln x$ ۱۰) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

۱۱) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^x$ ۱۲) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{3x^2}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to 0^-} (x^{-1}) \sin^{-1} x$ ۱۴) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\ \tan(\frac{\pi x}{2})$

۱۵) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (\tan x - \sec x)$ ۱۶) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\csc x - \cot x)$

۲- با استفاده از قاعده هوپیتال حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 0^+} (3x)^x$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$

۳) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ ۴) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\csc x)^{\sin x}$

۵) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{2}{x})^x$ ۶) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$

۷) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{x}{x+1})^x$ ۸) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

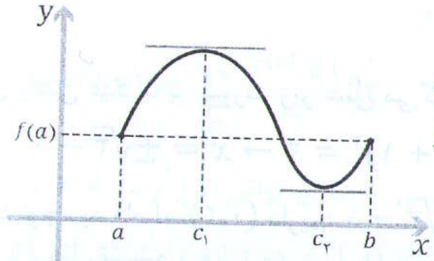
۴-۶ قضیه‌های رُل، لاگرانژ، تیلور و روش نیوتن

۱) قضیه‌های رُل و لاگرانژ

در زیر دو قضیه مهم ریاضی همراه با مثال‌هایی معرفی شده‌اند. قضیه اول توسط میشل رُل (۱۷۱۹-۱۶۵۲) ریاضی‌دان فرانسوی ثابت شده است. قضیه دوم به قضیه مقدار میانگین معروف است و به کمک قضیه رُل ثابت می‌شود، این قضیه توسط ریاضی‌دان فرانسوی دیگری به نام ژوزف لویی لاگرانژ (۱۸۱۳-۱۷۳۶) ثابت شده است. زیبایی قضیه مقدار میانگین را زمانی می‌توان احساس کرد که کاربرد آن را در اثبات قضیه‌های مهمی مانند تشخیص صعودی یا نزولی بودن یا تقعر تابع و یا اثبات بعضی نامساوی‌های مهم، مشاهده کنیم.

قضیه ۱(قضیه رُل): هرگاه برای تابع f داشته باشیم: الف) روی فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد ب) روی فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد ج) $f(a)=f(b)$

آنگاه حداقل یک عدد مانند c در فاصله (a,b) موجود است به طوری که $f'(c)=0$



توجه: شکل مقابل تعبیر هندسی قضیه رُل را نشان می‌دهد، در نقاط c_1 و c_2 شیب خط مماس بر منحنی برابر صفر است.

مثال ۱: شرایط قضیه رُل را برای تابع $f(x)=x^3-x^2+1$ در فاصله $[0,1]$ بررسی کرده و مقدار c را بیابید.

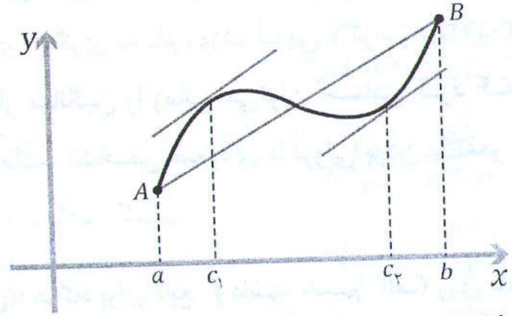
حل: چون f یک تابع چندجمله‌ای می‌باشد پس در فاصله $[0,1]$ پیوسته و در فاصله $(0,1)$ مشتق‌پذیر می‌باشد. همچنین داریم: $f(0)=f(1)=1$: بنابراین شرایط قضیه رُل فراهم و نقطه‌ای مانند $c\in(0,1)$ موجود است که: $f'(c)=0$

$$f'(x)=3x^2-2x=0 \rightarrow x(3x-2)=0 \rightarrow (x=0\,, x=\tfrac{2}{3})$$

لذا با توجه به فاصله $(0,1)$ داریم: $c=\frac{2}{3}$

قضیه ۲(قضیه مقدار میانگین یا قضیه لاگرانژ): اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و در فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه حداقل یک عدد مانند c در فاصله (a,b) موجود است به‌طوری‌که: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

توجه: شکل زیر تعبیر هندسی قضیه مقدار میانگین را نشان می‌دهد، در نقاط $c_۱$ و $c_۲$ شیب خط مماس برابر شیب خط AB می‌باشد.



مثال ۲: تابع $f(x) = \frac{x}{x+۱}$ در فاصله $[۰,۲]$ پیوسته و در فاصله $(۰,۲)$ مشتق‌پذیر است؛ پس بنابر قضیه مقدار میانگین عددی مانند $c \in (۰,۲)$ موجود است که:

$$f'(c) = \frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰} = \frac{\frac{۲}{۳}-۰}{۲-۰} = \frac{۱}{۳}$$

برای یافتن عدد c به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{۱}{(x+۱)^۲} \to \frac{۱}{(x+۱)^۲} = \frac{۱}{۳} \to (x+۱)^۲ = ۳ \to x = \pm\sqrt{۳} - ۱$$

لذا با توجه به فاصله $(۰,۲)$ داریم: $c = \sqrt{۳} - ۱$

نکته: بدون توجه به اینکه قضیه مقدار میانگین به کمک قضیه رُل ثابت می‌شود، قضیه رُل را می‌توان حالت خاص قضیه مقدار میانگین در نظر گرفت.

(در قضیه مقدار میانگین اگر قرار دهیم: $f(a) = f(b)$ داریم: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{۰}{b-a} = ۰$)

مثال ۳: تابع $f(x) = |x|$ در فاصله $[-۱,۳]$ پیوسته است ولی در این فاصله مشتق پذیر نیست (زیرا $f'(۰)$ موجود نمی‌باشد). بنابراین شرایط قضیه مقدار میانگین فراهم نیست و نمی‌توان انتظار داشت که در این فاصله عددی مانند c پیدا شود که: $f'(c) = \frac{f(۳)-f(-۱)}{۳-(-۱)} = \frac{۳-۱}{۳+۱} = \frac{۱}{۲}$. (در مورد این تابع داریم: $f'(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$)

۴) تقریب یک تابع با یک چندجمله‌ای به روش تیلور

مقدار توابع چندجمله‌ای در هر نقطه را می‌توان با انجام تعدادی متناهی از اعمال جمع و ضرب به‌دست آورد. اما مقدار توابع دیگری مانند $\sin x$ ، e^x و $Ln\, x$ در هر نقطه‌ای به این سادگی قابل محاسبه نمی‌باشد. روش‌های متعددی وجود دارد که می‌توان یک تابع را در اطراف یک نقطه با یک تابع چندجمله‌ای تقریب زد. یکی از رایج‌ترین آنها، روشی است که توسط بروک تیلور (۱۶۸۵-۱۷۳۱) ریاضی‌دان انگلیسی ارائه شده است. او در قضیه زیر یکی از کاربردهای جالب و شگفت‌انگیز مشتق را ارائه کرده است، این قضیه را می‌توان تعمیمی از قضیه مقدار میانگین تلقی کرد.

قضیه ۳ (قضیه تیلور): فرض کنید تابع $f(x)$ در اطراف نقطه a دارای مشتق از هر مرتبه‌ای باشد، آنگاه در هر نقطه x در اطراف $x = a$ داریم[1]:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^۲ + \frac{f'''(a)}{۳!}(x-a)^۳ + \cdots$$

$$\to f(x) = \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

تابع چندجمله‌ای فوق را **سری تیلور**، **بسط تیلور** یا **سری توانی** تابع f می‌نامند. ویژگی مشترک تابع f و سری تیلور f این است که مقدار این دو تابع و مشتق آنها از هر مرتبه‌ای در $x = a$ برابر است. با در نظر گرفتن $n + ۱$ جمله اول این سری نامتناهی می‌توان تابع f را با یک چندجمله‌ای از درجه n تقریب زد. این چندجمله‌ای را، چندجمله‌ای تیلور از درجه n در نقطه a برای تابع f می‌نامند.

۱- برای نمایش مختصر مجموع‌هایی که شامل تعداد زیادی جمله است، از حرف بزرگ یونانی سیگما (Σ) استفاده می‌شود مجموع‌های زیر نمونه‌هایی برای این نمایش می‌باشند.

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots + a_k = \sum_{i=۱}^{k} a_i \quad , \quad a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots = \sum_{i=۱}^{+\infty} a_i$$

تعریف ۱: سری تیلور تابع f در اطراف $x = 0$ را سری ماکلورن تابع f نیز می‌گویند. کالین ماکلورن (۱۶۹۸-۱۷۴۶) ریاضی‌دان اسکاتلندی می‌باشد. این سری به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

مثال ۴: سری ماکلورن تابع $f(x) = \sin x$ را بیابید.

حل: سری مورد نظر همان سری تیلور در نقطه $x = 0$ می‌باشد، لذا داریم:

$$f(x) = \sin x \to f(0) = 0 \quad , \quad f'(x) = \cos x \to f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \to f''(0) = 0 \quad , \quad f'''(x) = -\cos x \to f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \to f^{(4)}(0) = 0 \quad , \quad \ldots$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\to \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

مثال ۵: سری ماکلورن تابع $f(x) = e^x$ را بیابید.

حل: این سری همان سری تیلور در نقطه $x = 0$ می‌باشد، لذا داریم:

$$f(x) = e^x \to \left(\forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(x) = e^x \right) \to \left(\forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(0) = 1\right)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\to e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

مثال ۶: سری تیلور تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه $x = 1$ بیابید.

حل: $f(x) = \frac{1}{x} \to f(1) = 1 \quad , \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \to f'(1) = -1$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \to f''(1) = 2 \quad , \quad f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \to f'''(1) = -6$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5} \to f^{(4)}(1) = 24 \quad , \quad \ldots$$

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{-1}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{-6}{3!}(x-1)^3 + \cdots$$

$$\to \frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots$$

مثال ۷: سری تیلور تابع $f(x) = Ln\, x$ را در نقطه $x = 1$ بیابید.

حل:

$$f(x) = Ln\, x \to f(1) = 0 \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{x} \to f'(1) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \to f''(1) = -1 \quad , \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \to f'''(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} \to f^{(4)}(1) = -6 \quad , \quad \ldots$$

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{-6}{4!}(x-1)^4 + \cdots$$

$$\to Ln\, x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots$$

نکته: بنابر قضیه‌ای به نام **قضیه جانشانی** در بحث سری‌ها، درچندجمله‌ای تیلور یک تابع، می‌توان x را با یک تابع چندجمله‌ای برحسب x تعویض کرد.

مثال ۸: سری تیلور تابع $f(x) = e^{x^2}$ را در نقطه $x = 0$ بیابید.

حل: بنابر قضیه تیلور و مثال ۵ داریم:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

تابع $y = x^2$ چندجمله‌ای است، پس بنابر قضیه جانشانی داریم:

$$e^{x^2} = 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \cdots$$

$$\to f(x) = e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots$$

مثال ۹: سری تیلور تابع $f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$ را در نقطه $x=0$ بیابید.

حل: بنابر قضیه تیلور و مثال ۴ داریم:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

تابع $y=x^2$ چندجمله‌ای است، پس بنابر قضیه جانشانی داریم:

$$\sin(x^2)=(x^2)-\frac{(x^2)^3}{3!}+\frac{(x^2)^5}{5!}-\frac{(x^2)^7}{7!}+\cdots=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\cdots$$

بنابراین در اطراف نقطه $x=0$ می‌توان تابع $\frac{\sin x^2}{x}$ را با سری توانی زیر نمایش داد:

$$\frac{\sin x^2}{x}=x-\frac{x^5}{3!}+\frac{x^9}{5!}-\frac{x^{13}}{7!}+\cdots$$

مثال ۱۰: سری تیلور تابع $f(x)=\cosh x$ را در نقطه $x=0$ بیابید.

حل: تعریف این تابع به صورت $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ است، پس داریم:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \quad \text{(بنابر مثال۵)}$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots \quad \text{(بنابر قضیه جانشانی)}$$

$$\rightarrow \cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2x^2}{2!}+\frac{2x^4}{4!}+\cdots\right)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

تذکر:

۱) موضوع تقریب یک تابع با یک چندجمله‌ای حاوی مطالب و نکات فراوانی است و در بحثی تحت عنوان «دنباله و سری» مطرح می‌شود[1].

۲) گاهی در محاسبه حد یک تابع، یا محاسبه یک انتگرال یا حل یک معادله دیفرانسیل، همه روش‌ها از کار می‌افتند، در این گونه مواقع معمولاً نمایش تابع به صورت یک سری توانی مشکل را حل می‌کند.

۳) یکی از روش‌های اثبات قاعده هوپیتال به کمک قضیه تیلور می‌باشد.

۱- این بحث در فصل نهم کتاب ریاضیات عمومی دو مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴) حل معادله $f(x)=0$ به روش نیوتن

پاسخ بسیاری از مسائل در علوم و مهندسی، به یافتن ریشه‌های معادله‌ای به صورت $f(x)=0$ ختم می‌شود. حل یک معادله همواره کار ساده‌ای نیست و تنها می‌توان جواب دقیق را در حالت‌های خاص به‌دست آورد و در بقیه موارد مجبوریم به یافتن مقدار تقریبی ریشه‌های معادله اکتفا کنیم.

برای یافتن ریشه‌های تقریبی یک معادله روش‌های متعددی وجود دارد. این روش‌ها معمولاً در درسی تحت عنوان **محاسبات عددی** مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این بخش تنها به ذکر یکی از این روش‌ها به نام روش نیوتن بسنده می‌کنیم. ایزاک نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷) ریاضی‌دان انگلیسی می‌باشد، او با بیان این روش یکی دیگر از کاربردهای جالب و شگفت‌انگیز مشتق را به نمایش گذاشت. در این روش ابتدا یک حدس اولیه برای ریشه معادله در نظر می‌گیریم. این حدس معمولاً به کمک نمودار تقریبی تابع به‌دست می‌آید. سپس به کمک دنباله‌ای از اعداد به صورت $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ تقریب‌های بهتری برای ریشه معادله پیدا می‌کنیم. اگر تقریبی با k رقم اعشار مورد نظر باشد، این عمل را آنقدر ادامه می‌دهیم تا دو تقریب متوالی با k رقم اعشاری مساوی حاصل شود. توضیح این روش را با ذکر یک مثال بسیار ساده شروع می‌کنیم، اما در مثال‌های بعدی اهمیت روش نیوتن بیشتر مشخص می‌شود.

مثال ۱۱: ریشه تقریبی معادله $x^2=5$ را تا سه رقم اعشار به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادله را به صورت $x^2-5=0$ می‌نویسیم. با در نظر گرفتن تابع $f(x)=x^2-5$ داریم: $f'(x)=2x$. با انتخاب تقریب اولیه $x_1=2$ برای ریشه مثبت این معادله بنابر روش نیوتن داریم:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=2-\frac{2^2-5}{2\times 2}=2/250$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=2/25-\frac{(2/25)^2-5}{2\times 2/25}=2/236$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=2/236-\frac{(2/236)^2-5}{2\times 2/236}=2/236$$

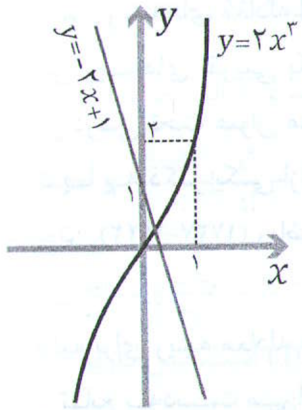
بنابراین ریشه مثبت این معادله با تقریب سه رقم اعشار ۲/۲۳۶ می‌باشد.

مثال ۱۲: با دقت چهار رقم اعشار، ریشه‌های معادله $۲x^۳ + ۲x - ۱ = ۰$ را بیابید.

حل: با در نظر گرفتن تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۲x - ۱$ داریم: $f'(x) = ۶x^۲ + ۲$

بنابر روش نیوتن داریم: $x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \to x_{n+۱} = x_n - \frac{۲(x_n)^۳+۲x_n-۱}{۶(x_n)^۲+۲}$

به منظور حدس مقداری مناسب برای $x_۱$ قرار می‌دهیم:



$$۲x^۳ + ۲x - ۱ = ۰ \to ۲x^۳ = -۲x + ۱$$

و نمودارهای $y = ۲x^۳$ و $y = -۲x + ۱$ را رسم می‌کنیم، به نظر می‌رسد این دو هم‌دیگر را در نقطه‌ای نزدیک $x = ۰/۵$ قطع می‌کنند. با انتخاب تقریب اولیه $x_۱ = ۰/۵$ به کمک ماشین حساب مقادیر زیر حاصل می‌شود:

$$x_۲ = ۰/۴۲۸۵ \quad , \quad x_۳ = ۰/۴۲۳۸ \ , \ x_۴ = ۰/۴۲۳۸$$

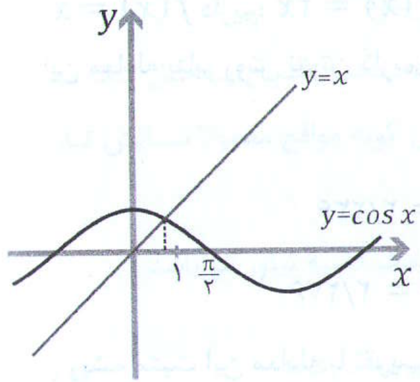
بنابراین ریشه معادله با تقریب چهار رقم اعشار عدد ۰/۴۲۳۸ می‌باشد.

مثال ۱۳: با دقت چهار رقم اعشار، ریشه معادله $\cos x = x$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله را به صورت $\cos x - x = ۰$ می‌نویسیم. با در نظر گرفتن $f(x) = \cos x - x$، داریم: $f'(x) = -\sin x - ۱$. بنابر روش نیوتن داریم:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \to x_{n+۱} = x_n - \frac{\cos(x_n)-x_n}{-\sin(x_n)-۱} = x_n + \frac{\cos(x_n)-x_n}{\sin(x_n)+۱}$$

به منظور حدس مقداری مناسب برای $x_۱$،



نمودارهای $y = \cos x$ و $y = x$ را رسم می‌کنیم. به نظر می‌رسد آنها در نقطه‌ای با طول کمتر از $x = ۱$ هم‌دیگر را قطع می‌کنند، پس به عنوان اولین تقریب $x_۱ = ۱$ را انتخاب می‌کنیم.

به کمک ماشین حساب مقادیر زیر حاصل می‌شود:

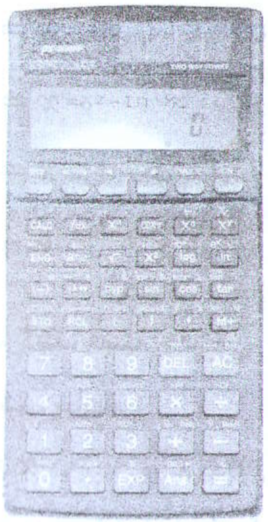
$$x_۲ = ۰/۷۵۰۳ \ , \ x_۳ = ۰/۷۳۹۱ \ , \ x_۴ = ۰/۷۳۹۰ \ , \ x_۵ = ۰/۷۳۹۰$$

چون $x_۴$ و $x_۵$ درچهار رقم اعشار توافق دارند پس عدد ۰/۷۳۹۰ ریشه معادله با تقریب چهار رقم اعشار خواهد بود.

اگر روش نیوتن برای یافتن ریشه‌های بعضی از معادلات با تقریب‌های اولیه خاص ممکن است مفید نباشد، در این نوع معادلات، تقریب‌های بعدی از تقریب اولیه دور می‌شوند و یا خارج از دامنه f قرار می‌گیرند.

توجه: مقدار $y = g(x)$ به ازای مقادیر مختلف به کمک **ماشین‌های حساب علمی** به راحتی قابل محاسبه است. البته نحوه کار با ماشین‌های حساب، کمی با هم متفاوت است لذا باید دفترچه راهنمای آنها را به دقت مطالعه کرد. در بسیاری از ماشین‌ها، برای محاسبه مقدار $g(x)$ به ازای مقادیر مختلف به روش زیر می‌توان عمل کرد:

ابتدا عبارت $g(x)$ را تایپ کنید (برای این منظور می‌توانید از کلید $ALPHA$ کمک بگیرید)، سپس کلید $CALC$ را فشار دهید عبارت $x =?$ بر روی صفحه ظاهر می‌شود. مقدار مورد نظر را تایپ کنید و کلید $=$ را فشار دهید، مقدار $g(x)$ به ازای مقدار داده شده بر صفحه ظاهر می‌شود. بار دیگر کلید $CALC$ را فشار دهید دوباره عبارت $x =?$ ظاهر می‌شود، مقدار دیگری را تایپ کرده و کلید $=$ را فشار دهید، مقدار $g(x)$ به ازای دومین عدد شما بر صفحه ظاهر می‌شود. با ادامه این روند شما مقدار $g(x)$ را به ازای مقادیر زیادی می‌توانید محاسبه و ثبت کنید.



به عنوان نمونه در روش نیوتن، یعنی $y = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ را برای تابع $f(x) = x^۳ + ۲x$ باید به صورت زیر تایپ کنید:

$$y = x - ((x^۳ + ۲x) \div (۳x^۲ + ۲))$$

تمرین

۱- برای توابع زیر در فاصله‌های داده شده، شرایط قضیه رُل را بررسی کرده و در صورت برقراری شرایط، نقاطی را که در آنها مشتق صفر است بیابید.

۱) $f(x) = x^2 - 5x + 6 \ , \quad [2,3]$ ۲) $f(x) = x^3 - 4x + 1 \ , \quad [-2,2]$

۳) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1} \ , \quad [-2,2]$ ۴) $f(x) = |x-2| \ , \quad [0,4]$

۵) $f(x) = 1 + \sin 2x \ , \quad [0,\frac{\pi}{2}]$ ۶) $f(x) = \sin x + \cos x \ , \quad [0,2\pi]$

۲- برای توابع زیر در فاصله‌های داده شده، شرایط قضیه مقدار میانگین را بررسی کرده و در صورت برقراری شرایط، نقاط مورد نظر در قضیه را بیابید. ($f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$)

۱) $f(x) = x^2 - 2x + 1 \ , \quad [-1,2]$ ۲) $f(x) = \cos x \ , \quad [0,\frac{\pi}{2}]$

۳) $f(x) = \frac{x-1}{x+1} \ , \quad [-2,3]$ ۴) $f(x) = e^x \ , \quad [0,1]$

۵) $f(x) = \sqrt[3]{x} \ , \quad [0,8]$ ۶) $f(x) = x \ln x \ , \quad [0,1]$

۳- چهار جمله اول غیر صفر سری تیلور توابع زیر را در نقطه داده شده بنویسید.

۱) $f(x) = \sin x \ , \quad x = \frac{\pi}{2}$ ۲) $f(x) = \cos x \ , \quad x = 0$

۳) $f(x) = \ln(x+1) \ , \quad x = 0$ ۴) $f(x) = e^x \ , \quad x = 1$

۵) $f(x) = \frac{1}{x^2} \ , \quad x = 1$ ۶) $f(x) = \ln(x^2) \ , \quad x = 1$

۷) $f(x) = \tan x \ , \quad x = 0$ ۸) $f(x) = \sqrt{1+x} \ , \quad x = 0$

۴- به کمک قضیه جانشانی، چهار جمله اول غیر صفر سری تیلور توابع زیـر را در نقطـه داده شده بیابید.

۱) $f(x) = e^{-2x} \ , \quad x = 0$ ۲) $f(x) = \cos(x^2) \ , \quad x = 0$

۳) $f(x) = \sin 4x \ , \quad x = 0$ ۴) $f(x) = \ln(x^2+1) \ , \quad x = 1$

۵- توابع زیر را به صورت یک سری توانی در اطراف نقطه داده شده بنویسید.

۱) $f(x) = \sin x + \cos x \ , \quad x = 0$ ۲) $f(x) = \sinh x \ , \quad x = 0$

۳) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \ , \quad x = 1$ ۴) $f(x) = x^3 \cos x \ , \quad x = 0$

۶- با استفاده از روش نیوتن، جوابی برای معادله با دقت سه رقم اعشار در فاصلـه داده شده بیابید.

۱) $x^3 - x^2 + 1 = 0 \ , \quad (-\infty,0)$ ۲) $x^4 + x - 3 = 0 \ , \quad (0,+\infty)$

۳) $2\sin x = x - 1 \ , \quad (0,+\infty)$ ۴) $e^x + 2x = 2 \ , \quad (0,+\infty)$

۴-۷ توابع صعودی و نزولی، نقاط ماکزیمم و می‌نیمم، تقعر و نقطه عطف

۱) توابع صعودی و نزولی[1]

رابطه بین صعودی و نزولی بودن تابع و مشتق: فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر فاصله (a,b) و x و x_1 دو نقطه دلخواه این فاصله باشند. برحسب اینکه تابع f صعودی یا نزولی باشد، داریم[2]:

$$x < x_1 \xrightarrow{f\ \text{صعودی}} f(x) < f(x_1) \rightarrow \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ f(x) - f(x_1) < 0 \end{cases} \rightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > 0$$

$$\rightarrow \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geq 0 \rightarrow f'(x_1) \geq 0$$

$$x < x_1 \xrightarrow{f\ \text{نزولی}} f(x) > f(x_1) \rightarrow \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ f(x) - f(x_1) > 0 \end{cases} \rightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < 0$$

$$\rightarrow \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq 0 \rightarrow f'(x_1) \leq 0$$

مطالب فوق ارتباط بین یک تابع مشتق‌پذیر و صعودی یا نزولی بودن آن را نشان می‌دهد و لذا قضیه زیر را راحت‌تر می‌توانید بپذیرید. این قضیه، عکس مطالب فوق بوده و به کمک قضیه مقدار میانگین ثابت می‌شود.

قضیه ۱: اگر تابع f در فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم: الف) $f'(x) > 0$ ، آنگاه تابع f بر این فاصله صعودی است.

ب) $f'(x) < 0$ ، آنگاه تابع f بر این فاصله نزولی است.

۱- معمولاً هرگاه از لفظ صعودی یا نزولی استفاده می‌شود منظور نوع اکید آن می‌باشد و در این بخش هم، منظور همین است.

۲- در این توضیحات از این قضیه استفاده شده است: «اگر برای هر نقطه همسایگی محذوف x_1 داشته باشیم: $f(x) > 0$ آنگاه داریم: $\lim_{x\to x_1} f(x) \geq 0$ و اگر $f(x) < 0$ آنگاه داریم: $\lim_{x\to x_1} f(x) \leq 0$ »

نتیجه: برای تعیین صعودی یا نزولی بودن یک تابع مشتق‌پذیر، تابع مشتق اول را تعیین علامت می‌کنیم. در فاصله‌ای که مشتق اول مثبت است تابع صعودی و در فاصله‌ای که مشتق اول منفی است تابع نزولی می‌باشد.

مثال ۱: در زیر فاصله‌هایی که تابع بر آنها صعودی یا نزولی می‌باشد، مشخص شده است.

۱) $f(x) = -2x + 1 \rightarrow f'(x) = -2 < 0 \rightarrow$ تابع f بر $\mathbb{R}$ نزولی است

۲) $f(x) = x^3 + 2x + 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 > 0 \rightarrow$ تابع f بر $\mathbb{R}$ صعودی است

۳) $f(x) = \frac{x-2}{3-x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(3-x)^2} > 0 \quad , \quad D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

بنابراین تابع f بر فاصله‌های $(3,+\infty)$ و $(-\infty,3)$ صعودی می‌باشد.

۴) $g(x) = x^2 + 2x \rightarrow g'(x) = 2x + 2 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

عبارت $2x + 2$ برای $x < -1$ منفی و برای $x > -1$ مثبت می‌باشد، بنابراین تابع g بر فاصله $(-\infty,-1)$ نزولی و بر فاصله $(-1,+\infty)$ صعودی می‌باشد[1].

۵) $h(x) = x^3 - 3x + 2 \rightarrow h'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

با تعیین علامت عبارت $3x^2 - 3$ مشخص می‌شود که تابع h بر فاصله‌های $(-\infty,-1)$ و $(1,+\infty)$ صعودی و بر فاصله $(-1,1)$ نزولی است.

نکته: توضیحات مربوط به توابع g و h مثال فوق را برای اختصار با جدول‌هایی به صورت زیر نشان می‌دهیم و آنها را **جدول تغییرات تابع** می‌نامیم. در مباحث بعدی سطرهای دیگری به این جدول‌ها اضافه می‌کنیم[2].

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h'		+	•	-	•	+	

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'		-	•	+	

۱- با توجه به اینکه تابع g در $x = -1$ پیوسته است، می‌توان گفت تابع بر فاصله $(-\infty,-1]$ نزولی و بر فاصله $[-1,+\infty)$ صعودی است.

۲- بعضی از مولفین این سطرها را به جای f' ، f'' و f با $f'(x)$ ، $f''(x)$ و $f(x)$ نمایش می‌دهند.

۲) ماکزیمم و می‌نیمم

تعریف ۱: اگر تابع f روی مجموعه A تعریف شده باشد، هرگاه نقطه‌ای مانند $c \in A$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم: $f(x) \leq f(c)$، مقدار $f(c)$ را **ماکزیمم مطلق** تابع f در A می‌نامند.

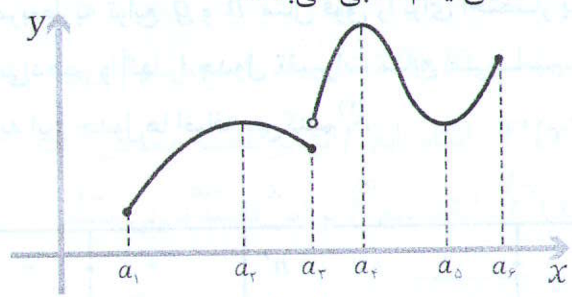
تعریف ۲: اگر تابع f روی مجموعه A تعریف شده باشد، هرگاه نقطه‌ای مانند $c \in A$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم: $f(x) \geq f(c)$، مقدار $f(c)$ را **می‌نیمم مطلق** تابع f در A می‌نامند.

تعریف ۳: تابع f دارای یک **ماکزیمم نسبی** در c است هرگاه فاصله بازی مانند I شامل c موجود باشد به طوری که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(x) \leq f(c)$

تعریف ۴: تابع f دارای یک **می‌نیمم نسبی** در c است هرگاه فاصله بازی مانند I شامل c موجود باشد به طوری که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(x) \geq f(c)$

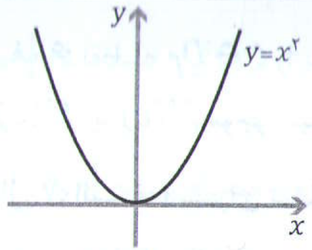
تعریف ۵: نقطه‌ای که ماکزیمم یا می‌نیمم باشد، نقطه **اکسترمم** می‌گویند.

مثال ۲: در زیر نمودار تابع g بر مجموعه $A = [a_۱, a_۶]$ را مشاهده می‌کنید. با توجه به تعریف‌های ماکزیمم و می‌نیمم مطلق و نسبی، تابع در $x = a_۴$ دارای ماکزیمم مطلق، در $x = a_۱$ می‌نیمم مطلق، در $x = a_۲$ و $x = a_۴$ ماکزیمم نسبی در $x = a_۳$ و $x = a_۵$ می‌نیمم نسبی می‌باشد.

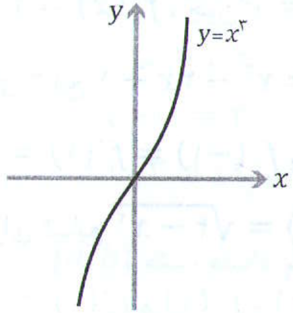


تذکر: در مثال فوق $x = a_۱$ می‌نیمم مطلق است ولی می‌نیمم نسبی نمی‌باشد. با توجه به تعریف نقاط اکسترمم مطلق و نسبی، نقاط اکسترمم مطلق می‌توانند نقاط انتهایی یک فاصله بسته هم باشند ولی نقاط اکسترمم نسبی از نقاط یک فاصله باز می‌باشند.

مثال ۳: تابع $f(x) = x^۲$ در نقطه $x = ۰$ دارای می‌نیمم نسبی و می‌نیمم مطلق است ولی دارای ماکزیمم نسبی و ماکزیمم مطلق نمی‌باشد.

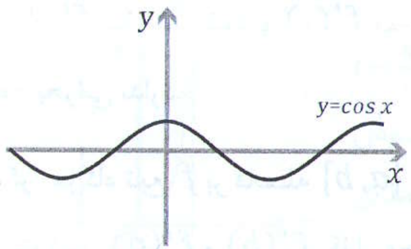


مثال ۴: تابع $f(x) = x^۳$ دارای هیچ ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی و مطلق نمی‌باشد.

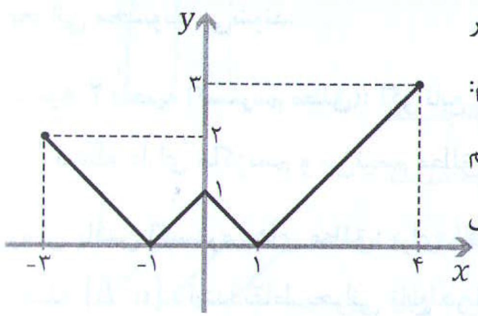


تذکر: مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق در صورت وجود منحصر به فرد می‌باشند، ولی ممکن است در نقاط متعددی تکرار شوند. در مثال‌های زیر این مطلب را مشاهده می‌کنید.

مثال ۵: تابع $f(x) = cos\,x$ دارای ماکزیمم نسبی و مطلق ۱ در نقاط $x = ۲k\pi$ و مقدار می‌نیمم نسبی و مطلق ۱- در نقاط $x = (۲k - ۱)\pi$ می‌باشد $(k \in \mathbb{Z})$.



مثال ۶: برای تابع $f(x) = \left||x| - ۱\right|$ در فاصله $[-۳,۴]$ با توجه به نمودار آن داریم: تابع در $x = ۱$ و $x = -۱$ دارای می‌نیمم نسبی و مطلق، در $x = ۰$ دارای ماکزیمم نسبی و در $x = ۴$ دارای ماکزیمم مطلق می‌باشد.



توجه: تحت شرایط خاص می‌توان اکسترمم‌های مطلق تابع را معرفی کرد، ولی قبل از بیان آن شرایط، به یک تعریف نیاز داریم.

تعریف ۶: نقطه $c \in D_f$ را یک **نقطه بحرانی** تابع f می‌نامند هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال ۷: الف) برای تابع $f(x) = ۲x - x^۲ + ۳$ داریم: $D_f = \mathbb{R}$ و $f'(x) = ۲ - ۲x$، چون $f'(۱) = ۰$ پس $x = ۱$ نقطه بحرانی تابع f است.

ب) برای تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$ داریم: $D_f = \mathbb{R}$ و $f'(x) = ۳x^۲ - ۳$،

چون $f'(-۱) = f'(۱) = ۰$ پس $x = ۱$ و $x = -۱$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند.

ج) برای تابع $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ داریم: $D_f = [-۲,۲]$ ، $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}}$

چون $f'(۰) = ۰$ و $f'(۲)$ و $f'(-۲)$ موجود نمی‌باشند، پس نقاط $x = -۲,۰,۲$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند.

د) برای تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ داریم: $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$ ، $f'(x) = -\frac{۱}{x^۲}$. در هیچ نقطه‌ای f' صفر نمی‌شود و $f'(۰)$ موجود نیست. اما چون $۰ \notin D_f$ ، پس تابع f هیچ نقطه بحرانی ندارد.

تذکر: هرگاه تابع f بر فاصله $[a,b]$ تعریف شده باشد، $f'(a)$ و $f'(b)$ موجود نیست زیرا $f'_-(a)$ و $f'_+(b)$ قابل محاسبه نمی‌باشند. بنابراین دو نقطه a و b همواره بحرانی محسوب می‌شوند.

قضیه ۲ (**قضیه اکسترمم مطلق**)**:** اگر تابع f روی فاصله بسته $[a,b]$ پیوسته باشد در این فاصله دارای ماکزیمم و می‌نیمم مطلق خواهد بود.

روش یافتن اکسترمم‌های مطلق: برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته f روی فاصله $[a,b]$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع در این فاصله را پیدا کرده، سپس مقدار تابع را در نقاط بحرانی محاسبه و مقایسه می‌کنیم. بیشترین مقدار، ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار، می‌نیمم مطلق است.

مثال ۸: اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$ را در فاصله $[-۲,۰]$ در صورت وجود معرفی کنید.

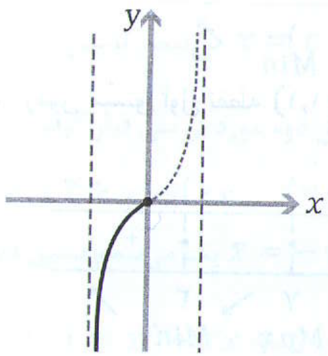
حل: تابع f یک تابع چندجمله‌ای می‌باشد پس روی فاصله بسته $[-۲,۰]$ پیوسته می‌باشد، لذا شرایط قضیه اکسترمم مطلق فراهم است. بنابر محاسبات مثال (۷ب) نقاط بحرانی تابع f در فاصله $[-۲,۰]$ عبارتند از: ۰ ، ۱− ، ۲− و داریم:

$$f(۰) = ۱ \ , \ f(-۱) = ۳ \ , \ f(-۲) = -۱$$

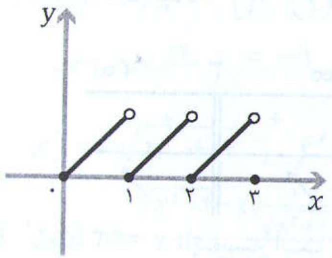
بنابراین ماکزیمم و می‌نیمم مطلق این تابع، به ترتیب عبارتند از: ۳ و ۱−

نکته: یکی از روش‌های **تعیین برد** یک تابع پیوسته بر فاصله بسته $[a,b]$ ، استفاده از قضیه اکسترمم مطلق می‌باشد. دراین حالت داریم: $R_f = [Min\, f \ , Max\, f]$

تذکر: اگر تابع پیوسته نباشد و یا فاصله بسته نباشد به روش قبل نمی‌توان اکسترمم‌های مطلق را پیدا کرد، در این حالت معمولاً از رسم شکل استفاده می‌کنیم.



مثال ۹: تابع $f(x) = tan\, x$ در فاصله $(-\frac{\pi}{۲}, ۰]$ شرایط قضیه اکسترمم مطلق را به علت بسته نبودن فاصله دارا نمی‌باشد. نمودار این تابع به صورت مقابل است. با توجه به نمودار، تابع دارای ماکزیمم مطلقی برابر صفر است و فاقد می‌نیمم مطلق می‌باشد.



مثال ۱۰: تابع $f(x) = x - [x]$ در فاصله بسته $[۰,۳]$ شرایط قضیه اکسترمم مطلق را به علت پیوسته نبودن f دارا نمی‌باشد. نمودار این تابع به صورت مقابل است. با توجه به نمودار، تابع دارای می‌نیمم مطلقی برابر صفر است و فاقد ماکزیمم مطلق است.

توجه: برای یافتن اکسترمم‌های نسبی یک تابع با شرایط خاص، قضیه‌های زیر مفید می‌باشند.

قضیه ۳ (قضیه آزمون مشتق اول): فرض کنید f بر (a,b) پیوسته و c یک نقطه بحرانی این فاصله باشد.

الف) اگر f' بر (a,c) مثبت و بر (c,b) منفی باشد، نقطه $x=c$ یک ماکزیمم نسبی است.

ب) اگر f' بر (a,c) منفی و بر (c,b) مثبت باشد، نقطه $x=c$ یک می‌نیمم نسبی است.

قضیه ۴: اگر تابع f بر (a,b) مشتق‌پذیر و در نقطه $c \in (a,b)$ دارای اکسترمم نسبی باشد، آنگاه $f'(c)=۰$.

نتیجه: برای تعیین اکسترمم‌های نسبی تابع f می‌توان از تعیین علامت $f'(x)$ کمک گرفت.

مثال ۱۱: اکسترمم‌های نسبی چند تابع در زیر به کمک آزمون مشتق اول، مورد بررسی قرار گرفته است.

۱) $f(x)=x^۲+۲x+۲$

$f'(x)=۲x+۲$

$۲x+۲=۰ \to x=-۱$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
f'		$-$	$\bullet$	$+$	
f		$\searrow$	۱ Min	$\nearrow$	

بنابر آزمون مشتق اول نقطه $(-۱,۱)$ می‌نیمم نسبی می‌باشد.

۲) $f(x)=x^۳-۳x+۵$

$f'(x)=۳x^۲-۳$

$۳x^۲-۳=۰ \to x=\pm ۱$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
f'		$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$	
f		$\nearrow$	۷ Max	$\searrow$	۳ Min	$\nearrow$	

بنابر آزمون مشتق اول نقاط $(۱,۳)$ و $(-۱,۷)$ به ترتیب می‌نیمم و ماکزیمم نسبی می‌باشند.

۳) $f(x)=\frac{x-۱}{۳-x}$, $D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$

$f'(x)=\frac{۲}{(۳-x)^۲}>۰$

x	$-\infty$		۳		$+\infty$
f'		$+$	$\Vert$	$+$	
f		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

تابع در نقطه $x=۳$ ناپیوسته است و در فاصله‌های $(۳,+\infty)$ و $(-\infty,۳)$ صعودی می‌باشد، لذا اکسترمم نسبی ندارد.

۴) $f(x)=|x|-۱$

$$f'(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ \text{موجود نیست} & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		$-$	$\not\exists$	$+$	
f		$\searrow$	-۱ Min	$\nearrow$	

بنابر آزمون مشتق اول تابع درنقطه $(۰,-۱)$ دارای می‌نیمم نسبی است.

۵) $f(x)=x^۳+۲$

$f'(x)=۳x^۲$

$۳x^۲=۰ \to x=۰$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		$+$	$\bullet$	$+$	
f		$\nearrow$	۲	$\nearrow$	

در اطراف نقطه $x=۰$ مشتق تغییر علامت نداده است، پس تابع اکسترمم نسبی ندارد.

توجه: به کمک قضیه زیر بدون تعیین علامت $f'(x)$، می‌توان نوع اکسترمم‌های یک تابع را مشخص کرد. دلیل درستی این قضیه پس از تعریف تقعر یک منحنی مشخص می‌شود.

قضیه ۵ (قضیه آزمون مشتق دوم): اگر تابع f بر فاصله‌ای شامل نقطه c مشتق‌پذیر باشد،

الف) اگر $f'(c)=۰$ و $f''(c)<۰$ آنگاه تابع f در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد.

ب) اگر $f'(c)=۰$ و $f''(c)>۰$ آنگاه تابع f در $x=c$ می‌نیمم نسبی دارد.

مثال ۱۲: اکسترمم‌های نسبی توابع زیر به کمک آزمون مشتق دوم مورد بررسی قرار گرفته است.

۱) $f(x)=x^۲+۲x$, $f'(x)=۲x+۲=۰ \to x=-۱$, $f''(-۱)=۲$

چون $f''(-۱)>۰$ پس بنابر آزمون مشتق دوم تابع در $x=-۱$ یک می‌نیمم نسبی دارد.

۲) $f(x)=x^۳-۳x+۵$, $f'(x)=۳x^۲-۳=۰ \to x=\pm ۱$

$f''(x)=۶x \to (f''(۱)=۶>۰$, $f''(-۱)=-۶<۰)$

بنابر آزمون مشتق دوم تابع در $x=۱$ می‌نیمم نسبی و در $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد.

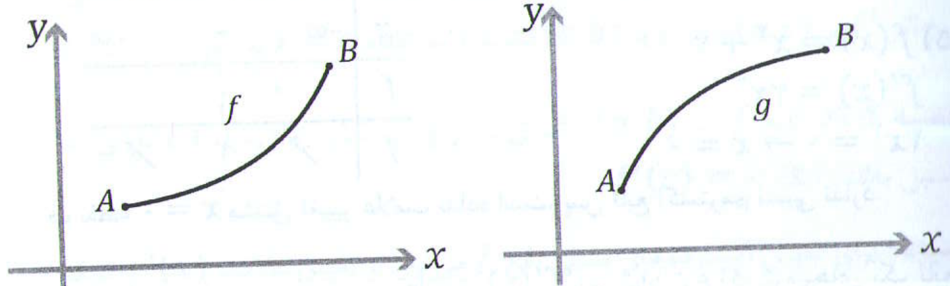
۳) $f(x)=\sqrt{x^۲+۴}$, $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۴}}=۰ \to x=۰$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^۲+۴}-x\left(\frac{x}{\sqrt{x^۲+۴}}\right)}{x^۲+۴} \to f''(۰)=\frac{۲}{۴}>۰$$

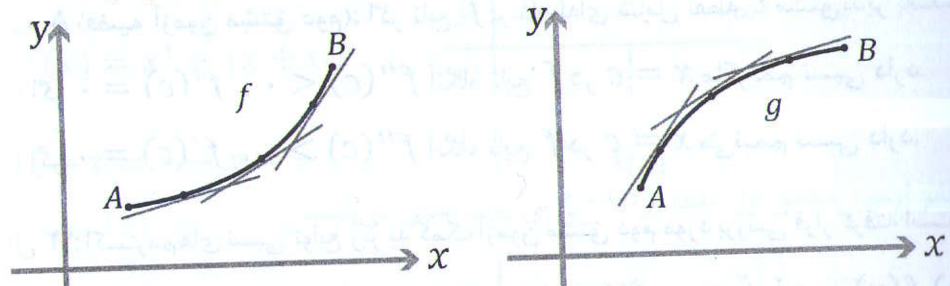
بنابر آزمون مشتق دوم تابع در $x=۰$ یک می‌نیمم نسبی دارد.

۳) تقعر و نقطه عطف

شکل‌های زیر دو تابع صعودی بر فاصله $[a,b]$ را نشان می‌دهد. هر دو نمودار نقاط A و B را به هم وصل می‌کنند، ولی این دو منحنی با یکدیگر متفاوت می‌باشند، زیرا انحنای آنها در جهت‌های مختلف می‌باشد. چگونه می‌توان این رفتار تابع را تشخیص داد؟



در شکل‌های زیر در نقاط مختلف دو تابع، مماس‌هایی رسم شده‌است. در تابع f، خطوط مماس زیر منحنی و در تابع g، خطوط مماس بالای منحنی قرار دارند.

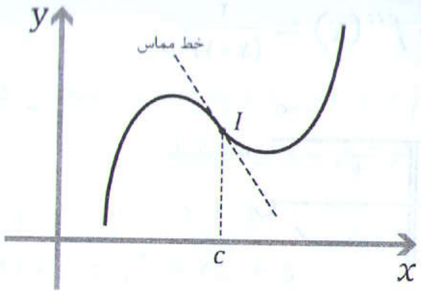


تعریف ۷: اگر نمودار تابع f در فاصله‌ای مانند I بالای تمام مماس‌هایش قرار گیرد، گوییم تقعر منحنی بر I به سمت بالا است و اگر زیر تمام مماس‌هایش قرار گیرد، گوییم تقعر منحنی بر I به سمت پایین است.

توجه: برای توابعی که مشتق دوم آنها موجود باشد به کمک قضیه زیر می‌توان جهت تقعر را تشخیص داد. این قضیه به کمک قضیه مقدار میانگین ثابت می‌شود.

قضیه ۶ (آزمون تقعر): فرض کنید تابع f بر فاصله I دارای مشتق دوم باشد، اگر برای هر $x \in I$ داشته باشیم: الف) $f''(x) > ۰$، آنگاه تقعر نمودار f بر I به سمت بالا است.

ب) $f''(x) < ۰$، آنگاه تقعر نمودار f بر I به سمت پایین است.



تعریف ۸: نقطه‌ای واقع بر یک منحنی را **نقطه عطف** می‌گویند هرگاه در این نقطه خط مماس موجود و جهت تقعر منحنی تغییر کند. نقطه عطف را معمولاً با I نمایش می‌دهند[1].

نتیجه: الف) اگر در اطراف نقطه‌ای، مشتق دوم تغییر علامت دهد و در این نقطه خط مماس موجود باشد این نقطه، نقطه عطف است.

ب) اگر در نقطه عطفی به طول c مشتق دوم موجود باشد، داریم: $f''(c) = ۰$

مثال ۱۳: جهت تقعر و نقطه عطف چند تابع در زیر مشخص شده است.

$$۱)\ f(x) = ۲x - x^۲ \to f'(x) = ۲ - ۲x \to f''(x) = -۲ < ۰$$

تقعر f بر $\mathbb{R}$ به سمت پایین است و تابع نقطه عطف ندارد.

$$۲)\ f(x) = x^۳ + ۲x + ۱ \to f'(x) = ۳x^۲ + ۲$$

$$\to f''(x) = ۶x = ۰ \to x = ۰$$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
f''	-	۰	+
f	⌒	۱	⌣
		I	

تابع در فاصله $(-\infty, ۰)$ تقعرش به سمت پایین و در فاصله $(۰, +\infty)$ تقعرش به سمت بالا است. چون $f'(۰) = ۲$ پس در $x = ۰$ خط مماس موجود است و لذا $(۰,۱)$ نقطه عطف منحنی f می‌باشد.

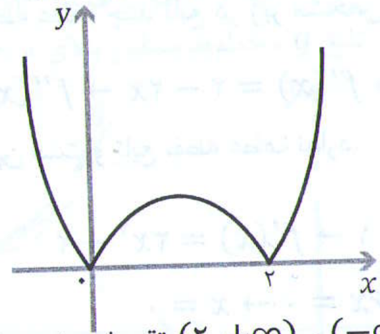
۱- بعضی از مفاهیم در طول تاریخ ریاضیات، دارای علامت یکسانی شده‌اند. یکی از این موارد نمایش فاصله به عنوان زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و نقطه عطف می‌باشد که هر دو را معمولاً با I نمایش می‌دهند. این حرف از ابتدای کلمات *Interval* به معنی فاصله و *Inflection point* به معنی نقطه عطف گرفته شده است.

$$۳)\ f(x)=\frac{x}{x-۱}\rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{(x-۱)^۲}\rightarrow f''(x)=\frac{۲}{(x-۱)^۳}$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''	$-$	‖	$+$
f	$\frown$	‖	$\smile$

تابع در فاصله $(-\infty,۱)$ تقعرش به سمت پایین و در فاصله $(۱,+\infty)$ تقعرش به سمت بالا است. در اطراف $x=۱$ تقعر عوض می‌شود ولی چون $۱\notin D_f$ ، پس در این نقطه خط مماس موجود نیست و لذا تابع نقطه عطف ندارد.

مثال ۱۴: نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۲x|$ به صورت زیر است.



این تابع در فاصله‌های $(-\infty,۰)$ و $(۲,+\infty)$ تقعرش به سمت بالا و در فاصله $(۰,۲)$ تقعرش به سمت پایین است. در نقاط $x=۰$ و $x=۲$ تابع پیوسته و تقعر منحنی عوض می‌شود ولی چون در این نقاط مشتق اول موجود نیست لذا در این نقاط خط مماس نداریم. بنابراین طبق تعریف این دو نقطه را نمی‌توان نقطه عطف نامید.

توضیح برای مثال ۱۴: در نقاط $x=۰,۲$ مشتق چپ و راست موجود ولی نابرابرند ، پس در این نقاط مشتق موجود نیست.

$$f(x)=|x^۲-۲x|=\begin{cases}x^۲-۲x & x\le ۰ \text{ یا } ۲\le x\\ -x^۲+۲x & ۰<x<۲\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}۲x-۲ & x<۰ \text{ یا } ۲<x\\ -۲x+۲ & ۰<x<۲\end{cases}\rightarrow\left(\begin{cases}f'_-(۰)=-۲\\ f'_+(۰)=۲\end{cases} \text{ و } \begin{cases}f'_+(۲)=۲\\ f'_-(۲)=-۲\end{cases}\right)$$

تمرین

۱- برای توابع زیر: الف) فاصله‌هایی که تابع بر آنها صعودی یا نزولی است، مشخص کنید.
ب) نقاط اکسترمم نسبی را در صورت وجود بیابید.

$۱)\ f(x)=۳-x-x^۲$ ‏ $۲)\ f(x)=۴x^۲-۴x+۱$

$۳)\ f(x)=x^۳+۲x+۵$ ‏ $۴)\ f(x)=۳x^۲-x^۳-۲$

$۵)\ f(x)=۲x^۲-x^۴$ ‏ $۶)\ f(x)=x^۴+۴x+۱$

$۷)\ f(x)=\frac{x+۱}{۲x}$ ‏ $۸)\ f(x)=\frac{۲x}{۱-x}$

$۹)\ f(x)=\frac{۱}{x^۲+۱}$ ‏ $۱۰)\ f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$

$۱۱)\ f(x)=x\sqrt{۱-x^۲}$ ‏ $۱۲)\ f(x)=x\sqrt{۶-x}$

$۱۳)\ f(x)=\sqrt[۳]{x^۳-۲x^۲}$ ‏ $۱۴)\ f(x)=x^{\frac{۲}{۳}}$

$۱۵)\ f(x)=x+\cos x\,,\ ۰\le x\le ۲\pi$ ‏ $۱۶)\ f(x)=x-۲\sin x\,,\ ۰\le x\le ۲\pi$

$۱۷)\ f(x)=x|x|$ ‏ $۱۸)\ f(x)=|x^۲-۱|$

$۱۹)\ f(x)=\frac{Ln\,x}{\sqrt{x}}$ ‏ $۲۰)\ f(x)=x^۲e^x$

۲- برای توابع زیر: الف) نقاط بحرانی را مشخص کنید.
ب) مقادیر اکسترمم مطلق را در فاصله داده شده، در صورت وجود بیابید.

$۱)\ f(x)=x^۲-۲x+۲\ ,\ [۰,۳]$ ‏ $۲)\ f(x)=۱-۲x-x^۲\ ,[-۴,۱]$

$۳)\ f(x)=x^۳-۱۲x+۱\ ,[-۳,۵]$ ‏ $۴)\ f(x)=۲x^۳+۳x^۲+۴\ ,[-۲,۱]$

$۵)\ f(x)=x^۴-۲x^۲+۲\ ,[-۳,۲]$ ‏ $۶)\ f(x)=۳x^۵-۵x^۳-۱\ ,[-۲,۲]$

$۷)\ f(x)=\frac{x-۱}{۲x-۱}\ ,\ [۱,۲]$ ‏ $۸)\ f(x)=\frac{x^۲+۱}{x}\ ,[\frac{۱}{۲},۲]$

$۹)\ f(x)=|x-۲|\ ,\ [۰,۳]$ ‏ $۱۰)\ f(x)=|x^۲+x|\ ,[-۲,۱]$

$۱۱)\ f(x)=\sqrt{(x-۲)^۳}\ ,\ [۱,۱۰]$ ‏ $۱۲)\ f(x)=\sqrt{۹-x^۲}\ ,[-۱,۲]$

$۱۳)\ f(x)=x-۲\cos x\ ,\ [-\pi,\pi]$ ‏ $۱۴)\ f(x)=\sin x+\cos x\ ,\ [۰,\frac{\pi}{۲}]$

$۱۵)\ f(x)=\frac{Ln\,x}{x}\ ,\ [۱,e^۲]$ ‏ $۱۶)\ f(x)=xe^{-x}\ ,\ [۰,۲]$

۳- در توابع زیر به کمک رسم نمودار، مقادیر اکسترمم مطلق و نقاط اکسترمم نسبی را در صورت وجود مشخص کنید.

۱) $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & -1 \le x < 0 \\ x^2 - x + 2 & 0 \le x < 1 \\ -2x+4 & 1 \le x \le 3 \end{cases}$ ۲) $f(x) = \begin{cases} Ln\,x & x \ge 1 \\ e^x & x < 1 \end{cases}$

۴- برای توابع زیر فاصله‌هایی که تقعر منحنی به سمت بالا یا پایین است مشخص کنید، هم‌چنین نقاط عطف را در صورت وجود معرفی کنید.

۱) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ ۲) $f(x) = (2x-1)^2 + 5$

۳) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ۴) $f(x) = (x-1)^3 + 2x$

۵) $f(x) = x^4 + 4x - 1$ ۶) $f(x) = x^4 - 2x^3$

۷) $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ ۸) $f(x) = \frac{-1}{x}$

۹) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ ۱۰) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

۱۱) $f(x) = \sqrt{x}$ ۱۲) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

۱۳) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ۱۴) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

۱۵) $f(x) = |2x + x^2|$ ۱۶) $f(x) = x|x|$

۱۷) $f(x) = x + \cos x\ ,\ D_f = [0, 2\pi]$ ۱۸) $f(x) = x + \sin x\ ,\ D_f = [0, 2\pi]$

۱۹) $f(x) = x\,Ln\,x$ ۲۰) $f(x) = xe^x$

۵- مقادیر a و b را چنان بیابید که:

الف) برای تابع $f(x) = ax^3 + bx^2$، نقطه $(1,2)$ نقطه عطف باشد.

ب) تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ در $x = 1$ اکسترمم نسبی و در $x = 2$ نقطه عطف داشته باشد.

۴-۸ رسم نمودار تابع

نمودار یک تابع بیانگر مطالب بسیاری در مورد رفتار آن می‌باشد. با یک نگاه به آن، می‌توان اطلاعات فراوانی را در مورد ویژگی‌های تابع به‌دست آورد. یکی از اهداف درس ریاضیات عمومی، ارائه روشی برای رسم منحنی‌ها با دقتی معقول می‌باشد. تاکنون اطلاعات فراوانی را در مورد رسم توابع به‌دست آورده‌ایم، اکنون وقت آن رسیده که این اطلاعات را کنار هم قرار داده و سپس اقدام به رسم نمودار تابع کنیم. فهرست اطلاعات قبل از رسم به صورت زیر می‌باشد.

۱- **تعیین دامنه تابع:** دامنه تابع محدوده رسم تابع را برای ما مشخص می‌کند.

۲- **بررسی زوج یا فرد بودن تابع:** اگر تابع f زوج باشد نمودار تابع نسبت به محور yها و اگر فرد باشد نسبت به مبدا مختصات قرینه است. دانستن این مطلب باعث می‌شود شکل را با دقت بیشتری رسم کنیم، ضمن اینکه می‌توانیم فقط نیمی از جدول تغییرات را تکمیل کنیم.

۳- **بررسی دوره تناوب:** اگر تابع f متناوب با دوره اصلی T باشد نمودار تابع را در فاصله‌ای به طول T رسم می‌کنیم؛ آنگاه برای رسم کامل نمودار، شکل را در فاصله‌های مشابه تکرار می‌کنیم.

۴- **مشخص کردن مجانب‌ها:** مجانب‌های افقی رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ یا بسیار کوچک و مجانب‌های قائم رفتار تابع را در اطراف بعضی از نقاطی که در دامنه تابع نمی‌باشند، مشخص می‌کنند. بعضی از توابع دارای مجانب دیگری به نام مجانب مایل نیز می‌باشند که ما در این کتاب به آن نپرداخته‌ایم.

۵- **فاصله‌های صعود یا نزول:** فاصله‌هایی که بر آنها مشتق اول مثبت باشد، تابع صعودی و فاصله‌هایی که بر آنها مشتق اول منفی باشد، تابع نزولی است.

۶- **مقادیر اکسترمم نسبی:** برای یک تابع پیوسته هنگام محاسبه مشتق، نقاطی را که مشتق موجود نیست یا مشتق برابر صفر است را مشخص می‌کنیم، اگر در اطراف این نقاط مشتق تغییر علامت دهد این نقاط اکسترمم نسبی می‌باشند.

۷- **تقعر و نقطه عطف:** در فاصله‌هایی که مشتق دوم مثبت باشد تقعر به سمت بالا و فاصله‌هایی که مشتق دوم منفی باشد تقعر به سمت پایین است. نقاطی که خط مماس در آنها موجود و در اطراف آن نقاط مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد نقاط عطف منحنی می‌باشند. گاهی محاسبه مشتق دوم دشوار و طولانی است، لذا خود را گرفتار آن نمی‌کنیم و سعی می‌کنیم با سایر اطلاعات منحنی را رسم کنیم. ضمن رسم، تقعرهای منحنی معمولاً مشخص می‌شوند.

۸- **تعیین جدول تغییرات:** اطلاعات مربوط به دامنه، مجانب‌ها، مشتق اول و مشتق دوم، نقاط اکسترمم نسبی و عطف را مرتب کرده در جدولی قرار می‌دهیم، و آن را جدول تغییرات تابع می‌گوییم.

۹- **تعیین نقاط کمکی:** برای رسم دقیق‌تر نمودار تابع می‌توان چند نقطه دیگر به جدول اضافه کرد، آنها را نقاط کمکی تابع می‌گویند. در بسیاری توابع، نقاطی که طول یا عرض آنها صفر است، نقاط کمکی مناسبی می‌توانند باشند.

۱۰- **رسم منحنی:** با استفاده از اطلاعات فوق نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = x^۲ - ۴x + ۲$ را رسم کنید.

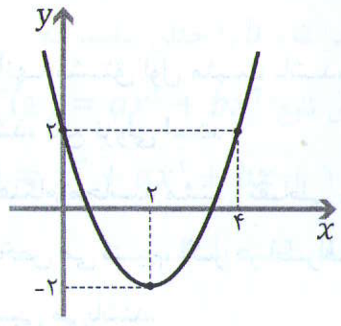
حل: $D_f = \mathbb{R} \quad , \quad f'(x) = ۲x - ۴ = ۰ \rightarrow x = ۲$

$f''(x) = ۲ > ۰$ (تقعر به سمت بالا)

$\underset{x\to \pm\infty}{Lim} f(x) = \underset{x\to \pm\infty}{Lim} x^۲ = +\infty$

$f(۰) = ۲ \; , \; f(۴) = ۲$ نقاط کمکی

x	$-\infty$		۰		۲		۴		$+\infty$
f'			$-$		۰		$+$		
f''			$+$				$+$		
f	$+\infty$	$\searrow$	۲	$\searrow$	-۲ Min	$\nearrow$	۲	$\nearrow$	$+\infty$



نکته: نمودار هر تابع چندجمله‌ای درجه دوم به صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ یک سهمی می‌باشد. طول رأس سهمی $x = \frac{-b}{۲a}$ است، زیرا:

$f'(x) = ۲ax + b = ۰ \rightarrow x = -\frac{b}{۲a}$

و چون $f''(x) = ۲a$، اگر $a > ۰$ تقعر سهمی به سمت بالا و اگر $a < ۰$ تقعر سهمی به سمت پایین است. بنابراین:

«سهمی را به کمک رأس و دو نقطه کمکی در دو طرف رأس می‌توان رسم کرد.»

مطالب فوق تأییدی برای روش رسم سهمی، در کتاب ریاضیات مقدماتی می‌باشد.

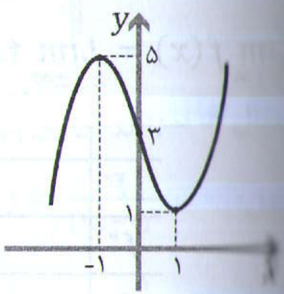
مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۳$ را به صورت زیر می‌توان رسم کرد.

$D_f = \mathbb{R} \; , \; f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \rightarrow x = \pm ۱ \; , \; f''(x) = ۶x = ۰ \rightarrow x = ۰$

$\underset{x\to +\infty}{Lim} f(x) = \underset{x\to +\infty}{Lim} x^۳ = +\infty \quad , \quad \underset{x\to -\infty}{Lim} f(x) = \underset{x\to -\infty}{Lim} x^۳ = -\infty$

$f(-۲) = ۱ \; , \; f(۲) = ۵$ نقاط کمکی

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
f'			$+$		۰		$-$		۰		$+$		
f''			$-$				۰				$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	۱	$\nearrow$	۵ Max	$\searrow$	۳ I	$\searrow$	۱ Min	$\nearrow$	۵	$\nearrow$	$+\infty$



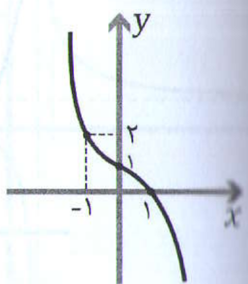
مثال ۳: نمودار تابع $f(x) = ۱ - x^۳$ را به صورت زیر می‌توان رسم کرد.

$D_f = \mathbb{R} \; , \; f'(x) = -۳x^۲ = ۰ \rightarrow x = ۰ \; , \; f''(x) = -۶x = ۰ \rightarrow x = ۰$

$\underset{x\to -\infty}{Lim} f(x) = \underset{x\to -\infty}{Lim} -x^۳ = +\infty \quad , \quad \underset{x\to +\infty}{Lim} f(x) = \underset{x\to +\infty}{Lim} -x^۳ = -\infty$

$f(-۱) = ۲ \; , \; f(۱) = ۰$ نقاط کمکی

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
f'			$-$		۰		$-$		
f''			$+$		۰		$-$		
f	$+\infty$	$\searrow$	۲	$\searrow$	۱ I	$\searrow$	۰	$\searrow$	$-\infty$



نکته: در نمودار تابع چندجمله‌ای درجه سوم $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ نکات زیر وجود دارد:

۱- در معادله $f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx + c = ۰$ اگر $\Delta > ۰$ تابع دارای دو نقطه اکسترمم نسبی و اگر $\Delta \leq ۰$ تابع فاقد نقطه اکسترمم نسبی است.

۲- این تابع دارای نقطه عطفی به طول $x = \frac{-b}{۳a}$ می‌باشد، زیرا:

$$f''(x) = ۶ax + ۲b = ۰ \to x = -\frac{b}{۳a}$$

۳- نقطه عطف منحنی، مرکز تقارن آن است.

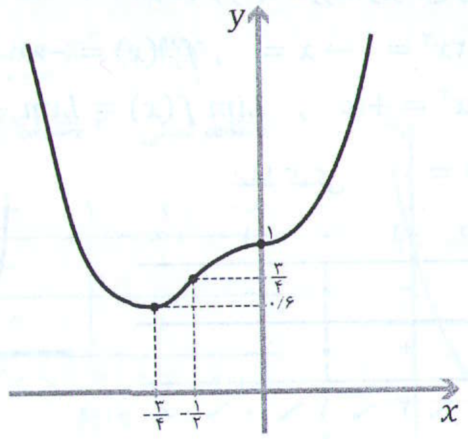
مثال ۴: نمودار تابع $f(x) = ۴x^۴ + ۴x^۳ + ۱$ را به صورت زیر می‌توان رسم کرد.

$$D_f = \mathbb{R} \ , \ f'(x) = ۱۶x^۳ + ۱۲x^۲ = ۴x^۲(۴x + ۳) = ۰ \to x = ۰, \frac{-۳}{۴}$$

$$f''(x) = ۴۸x^۲ + ۲۴x = ۲۴x(۲x + ۱) = ۰ \to x = \frac{-۱}{۲}, x = ۰$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} ۴x^۴ = +\infty$$

x	$-\infty$		$-\frac{۳}{۴}$		$-\frac{۱}{۲}$		۰		$+\infty$
f'		−	۰	+		+	۰	+	
f''		+		+	۰	−	۰	+	
f	$+\infty$	↘	$\frac{۳۷}{۶۴}$ Min	↗	$\frac{۳}{۴}$ I	↗	۱ I	↗	$+\infty$



مثال ۵: نمودار تابع $f(x) = \frac{-۱}{x}$ را رسم کنید.

حل: دامنه تابع مجموعه $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$ می‌باشد و تابع f فرد است. هم‌چنین داریم:

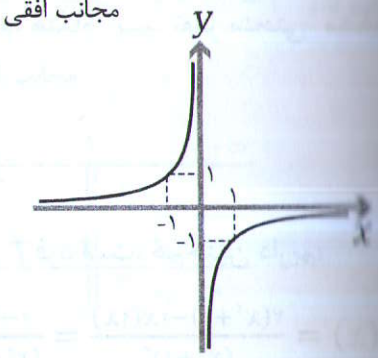
$$f'(x) = \frac{۱}{x^۲} > ۰ \ , \ f''(x) = \frac{-۲}{x^۳}$$

$$\left(\lim_{x \to ۰^+} \frac{-۱}{x} = -\infty \ , \ \lim_{x \to ۰^-} \frac{-۱}{x} = +\infty\right) \to x = ۰$$ مجانب قائم

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-۱}{x} = ۰ \to y = ۰$$ مجانب افقی

$$f(-۱) = ۱ \ , \ f(۱) = -۱$$ نقاط کمکی

x	$-\infty$	-۱	۰	۱	$+\infty$
f'	+		‖	+	
f''	+		‖	−	
f	۰ ↗ ۱ ↗ $+\infty$		‖	$-\infty$ ↗ -۱ ↗ ۰	



مثال ۶: نمودار تابع $f(x) = \frac{۲x+۱}{۲x-۱}$ را رسم کنید.

حل:

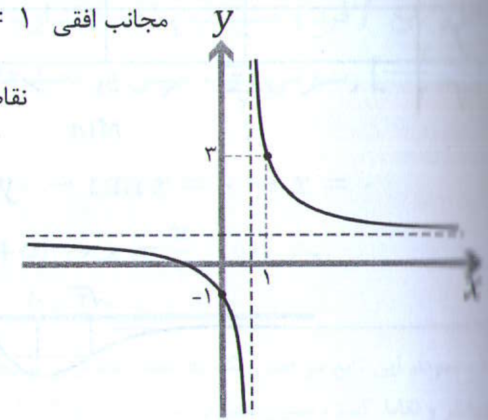
$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{۱}{۲}\right\} \ , \ f'(x) = \frac{-۴}{(۲x-۱)^۲} < ۰ \ , \ f''(x) = \frac{۱۶}{(۲x-۱)^۳}$$

$$\left(\lim_{x \to \frac{۱}{۲}^+} \frac{۲x+۱}{۲x-۱} = \frac{۲}{۰^+} = +\infty \ , \ \lim_{x \to \frac{۱}{۲}^-} \frac{۲x+۱}{۲x-۱} = \frac{۲}{۰^-} = -\infty\right) \to x = \frac{۱}{۲}$$ مجانب قائم

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x+۱}{۲x-۱} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x}{۲x} = ۱ \to y = ۱$$ مجانب افقی

$$f(۰) = -۱ \ , \ f(۱) = ۳$$ نقاط کمکی

x	$-\infty$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$+\infty$
f'	−		‖	−	
f''	−		‖	+	
f	۱ ↘ -۱ ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘ ۳ ↘ ۱	



نکته: در نمودار تابع چندجمله‌ای درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ نکات زیر وجود دارد:

۱- در معادله $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ اگر $\Delta > 0$ تابع دارای دو نقطه اکسترمم نسبی و اگر $\Delta \leq 0$ تابع فاقد نقطه اکسترمم نسبی است.

۲- این تابع دارای نقطه عطفی به طول $x = \frac{-b}{3a}$ می‌باشد، زیرا:

$$f''(x) = 6ax + 2b = 0 \to x = -\frac{b}{3a}$$

۳- نقطه عطف منحنی، مرکز تقارن آن است.

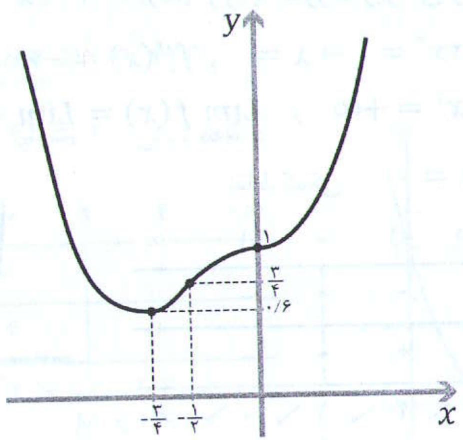
مثال ۴: نمودار تابع $f(x) = 4x^4 + 4x^3 + 1$ را به صورت زیر می‌توان رسم کرد.

$$D_f = \mathbb{R} \ , \ f'(x) = 16x^3 + 12x^2 = 4x^2(4x+3) = 0 \to x = 0, \frac{-3}{4}$$

$$f''(x) = 48x^2 + 24x = 24x(2x+1) = 0 \to x = \frac{-1}{2}, x = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 4x^4 = +\infty$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f'		$-$	$\bullet$	$+$		$+$	$\bullet$	$+$	
f''		$+$		$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{37}{64}$ Min	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$ I	$\nearrow$	1 I	$\nearrow$	$+\infty$



مثال ۵: نمودار تابع $f(x) = \frac{-1}{x}$ را رسم کنید.

حل: دامنه تابع مجموعه $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ می‌باشد و تابع f فرد است. هم‌چنین داریم:

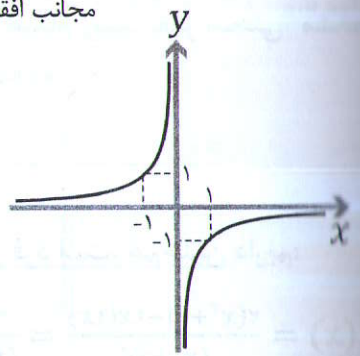
$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \ , \ f''(x) = \frac{-2}{x^3}$$

$$(\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty \ , \ \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty) \to x = 0$$ مجانب قائم

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{x} = 0 \to y = 0$$ مجانب افقی

$$f(-1) = 1 \ , \ f(1) = -1$$ نقاط کمکی

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	
f''		$+$	‖	$-$	
f	0	$\nearrow 1 \nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow -1 \nearrow$	0



مثال ۶: نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ را رسم کنید.

حل:

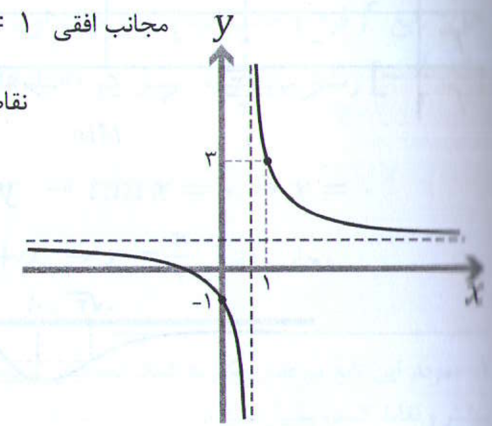
$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \ , \ f'(x) = \frac{-4}{(2x-1)^2} < 0 \ , \ f''(x) = \frac{16}{(2x-1)^3}$$

$$(\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \ , \ \lim_{x\to \frac{1}{2}^-} \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty) \to x = \frac{1}{2}$$ مجانب قائم

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{2x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2x} = 1 \to y = 1$$ مجانب افقی

$$f(0) = -1 \ , \ f(1) = 3$$ نقاط کمکی

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	
f''		$-$	‖	$+$	
f	1	$\searrow -1 \searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow 3 \searrow$	1



نکته: هر تابع به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که $c \neq 0$ و $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$، **تابع هموگرافیک** نامیده می‌شود. این تابع دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱- خط $x = \frac{-d}{c}$ مجانب قائم تابع است. ۲- خط $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی تابع است.

۳- محل برخورد مجانب‌ها یعنی نقطه $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$، مرکز تقارن تابع است.

۴- خط‌های $y = x + \frac{a+d}{c}$ و $y = -x + \frac{a-d}{c}$ محورهای تقارن تابع می‌باشند.

۵- در توابع هموگرافیک بدون محاسبه مشتق دوم، هنگام رسم، تقعر منحنی مشخص می‌شود، لذا می‌توان مشتق دوم را محاسبه نکرد.

مثال ۷: نمودار تابع $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ را رسم کنید.

حل: دامنه تابع مجموعه $D_f = \mathbb{R}$ می‌باشد و تابع f فرد است، هم‌چنین داریم:

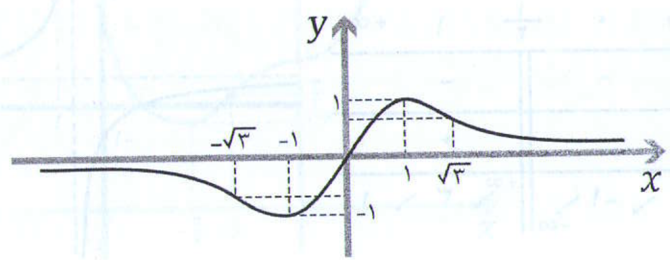
$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \to 2 - 2x^2 = 0 \to x = \pm 1$$

$$f''(x) = \frac{-4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \to -4x(3-x^2) = 0 \to x = 0, \pm\sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0 \to y = 0$$ مجانب افقی

چون مخرج این تابع گویا در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود لذا تابع مجانب قائم ندارد.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f''		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
			I		Min		I		Max		I		



مثال ۸: نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ را رسم کنید.

حل: تابع f فرد است و داریم: $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, $f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0$

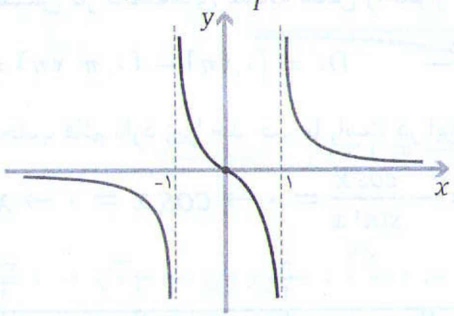
$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \to 2x(x^2+3) = 0 \to x = 0$$

$$(\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \ , \ \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty) \to x = 1$$ مجانب قائم

$$(\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \ , \ \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty) \to x = -1$$ مجانب قائم

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \to y = 0$$ مجانب افقی

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	
f''		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0
					I				



مثال ۹: نمودار $f(x) = \tan x$ را رسم کنید.[1]

حل: تابع f فرد و متناوب با دوره تناوب اصلی $T = \pi$ است. نمودار را در فاصله $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ رسم می‌کنیم، سپس در فاصله‌های مشابه شکل را تکرار می‌کنیم.

$$f'(x) = (1 + \tan^2 x) > 0$$

$$f''(x) = 2\tan x \ (1 + \tan^2 x) = 0 \to \tan x = 0 \to x = 0$$

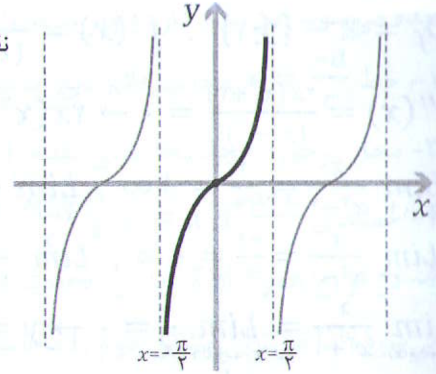
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \to x = \frac{\pi}{2}$$ مجانب قائم

۱- نمودار این تابع در فصل یکم به کمک نقطه‌یابی و توضیحات فراوان رسم شد. ولی در این مثال با اطلاعات بیشتر و نقاط کمتر، بسیار دقیق‌تر نمودار را رسم کرده‌ایم.

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}^{+}} \tan x = \lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}^{+}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{۱}{۰^{-}} = -\infty \to x = -\frac{\pi}{۲}$$ مجانب قائم

$f(-\frac{\pi}{۴}) = -۱ \ , \ f(\frac{\pi}{۴}) - ۱$ نقاط کمکی

x	$-\frac{\pi}{۲}$		$-\frac{\pi}{۴}$		۰		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{\pi}{۲}$
f'			$+$		۰		$+$		
f''			$-$		۰		$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	-۱	$\nearrow$	۰ (I)	$\nearrow$	۱	$\nearrow$	$+\infty$



مثال ۱۰: نمودار تابع $f(x) = \csc x$ را رسم کنید.

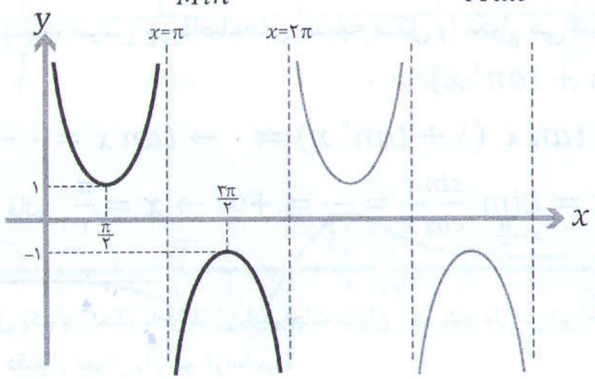
حل: این تابع متناوب با دوره تناوب اصلی $T = ۲\pi$ است. نمودار تابع را در فاصله $[۰,۲\pi]$ رسم می‌کنیم، سپس در فاصله‌های مشابه شکل را تکرار می‌کنیم.

$$f(x) = \csc x = \frac{۱}{\sin x} \quad , \quad D_f = [۰,۲\pi] - \{۰,\pi,۲\pi\} = (۰,\pi) \cup (\pi,۲\pi)$$

تابع در $x = ۰, \pi, ۲\pi$ مجانب قائم دارد زیرا حد چپ یا راست در این نقاط نامتناهی می‌شود.

$$f'(x) = \frac{۰ - \cos x}{\sin^۲ x} = -\frac{\cos x}{\sin^۲ x} = ۰ \to \cos x = ۰ \to x = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}$$

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
f'		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	۱ (Min)	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	-۱ (Max)	$\searrow$	$-\infty$



مثال ۱۱: نمودار تابع $f(x) = xe^x$ را رسم کنید.

حل: $D_f = \mathbb{R} \ , \ f'(x) = e^x(۱+x) = ۰ \xrightarrow{e^x \neq ۰} x = -۱$

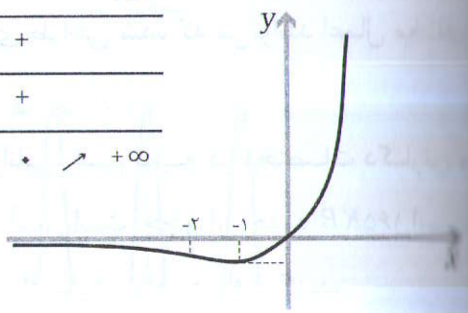
$f''(x) = e^x(۲+x) = ۰ \xrightarrow{e^x \neq ۰} x = -۲ \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} xe^x = +\infty$

در حد زیر پس از رفع ابهام به کمک قاعده هوپیتال داریم:

$\lim_{x\to -\infty} xe^x = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{۱}{-e^{-x}} = ۰ \to y = ۰$ مجانب افقی

$f(-۲) = -۲e^{-۲} = -۰/۲۷ \ , \ f(-۱) = -e^{-۱} = -۰/۳۷ \ , \ f(۰) = ۰$ نقطه کمکی

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		$+\infty$
f'		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
f''		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
f	۰	$\searrow$	$-۲e^{-۲}$ (I)	$\searrow$	$-e^{-۱}$ (Min)	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	$+\infty$



مثال ۱۲: نمودار تابع $f(x) = \frac{Ln\,x}{\sqrt{x}}$ را رسم کنید.

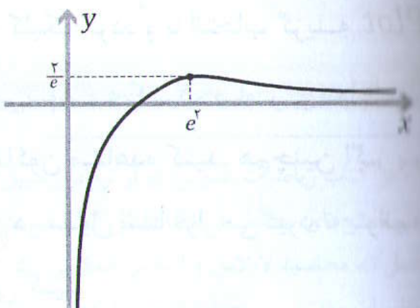
حل: $D_f = (۰,+\infty)$

$f'(x) = \frac{\sqrt{x}(۲ - Ln\,x)}{۲x^۲} = ۰ \to \sqrt{x}(۲ - Ln\,x) = ۰ \xrightarrow{x>۰} ۲ - Ln\,x = ۰ \to x = e^۲$

$\lim_{x\to ۰^+} \frac{Ln\,x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{\sqrt{x}} Ln\,x = (+\infty)(-\infty) = -\infty \to x = ۰$ مجانب قائم

$\lim_{x\to +\infty} \frac{Ln\,x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{۲\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{۲}{\sqrt{x}} = ۰ \to y = ۰$ مجانب افقی

x	۰		$e^۲$		$+\infty$
f'		$+$	۰	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{۲}{e}$ (Max)	$\searrow$	۰



رسم نمودار توابع با نرم‌افزارهای ریاضی:

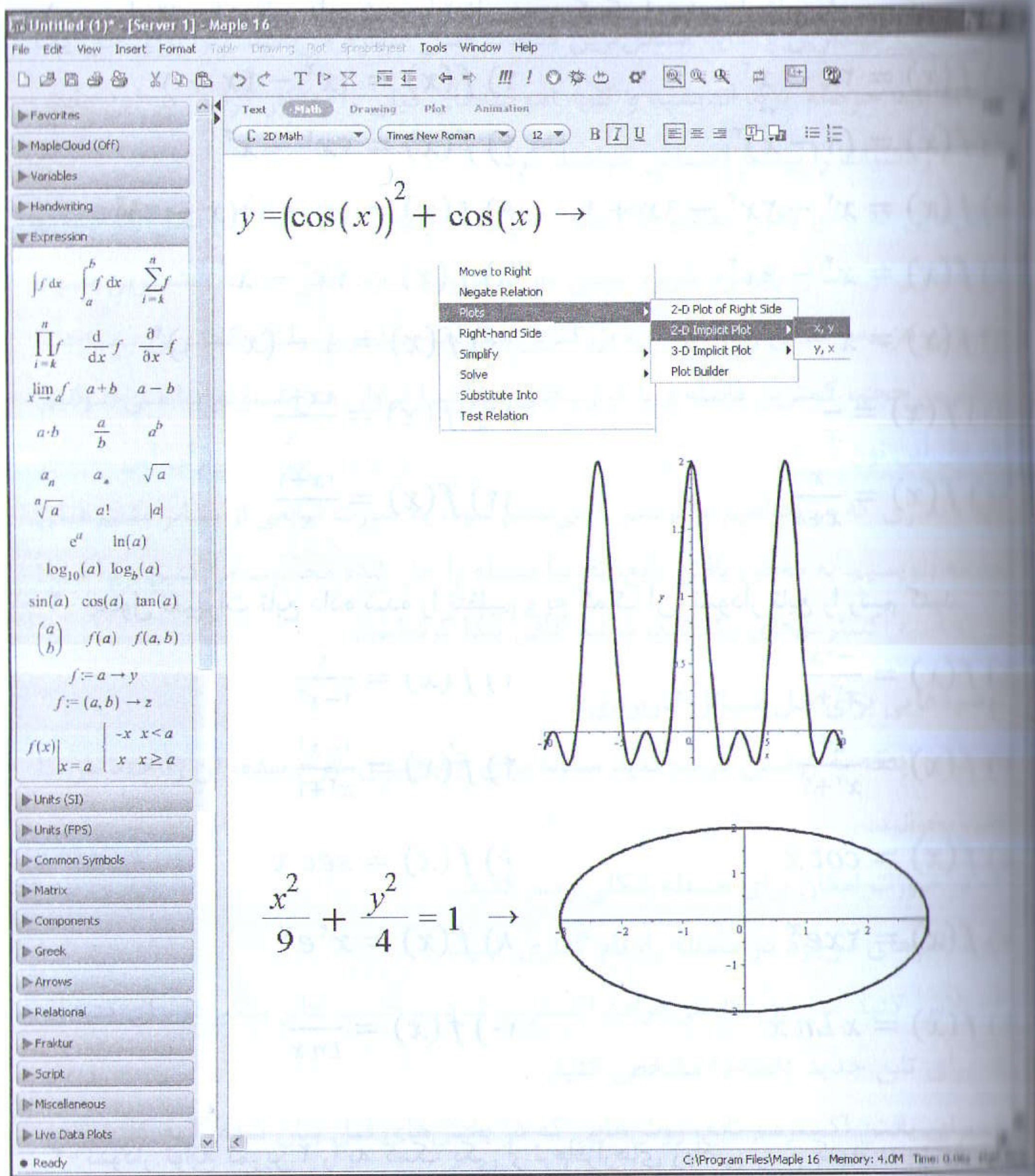
پیشرفت علم و تولید نرم‌افزارهای مختلف باعث شده آموزش و درک بسیاری از مفاهیم ریاضی، اعمال سنگین ریاضی و محاسبات خسته کننده به سادگی امکان پذیر باشد. استفاده از این نرم‌افزارها زمانی می‌تواند مفید باشد که از مفاهیم اولیه آگاهی کامل داشته باشیم و بتوانیم اعمال مقدماتی و مثال‌های ساده هر مبحث را به راحتی انجام دهیم. در چنین حالتی باید مسئله‌های پیچیده‌تر و اعمال سنگین‌تر را به این نرم‌افزارها واگذار کرد و انرژی و وقت خود را برای تفکر و پیشبرد بیشتر دانش خود و جامعه صرف نمود. نرم‌افزارهای ریاضی متعددی طراحی شده که می‌توانند اعمال مختلف ریاضی را انجام دهند. در اینجا دو مورد را معرفی می‌کنیم.

۱- نرم‌افزار $Wingraph$: این نرم‌افزار فقط توانایی رسم توابع در مختصات دکارتی و مختصات قطبی را دارد و کار با آن فوق العاده آسان است. حجم آن حدود $165KB$ است و نیازی به نصب ندارد. این نرم‌افزار را می‌توانید از سایت مؤلف دریافت کنید.

۲- نرم‌افزار $Maple$: این نرم‌افزار یکی از توانمندترین نرم‌افزارهای ریاضی می‌باشد و به دلیل توانایی انجام اعمال مختلف ریاضی، سادگی کار با آن و محیط جذابش، از محبوبیت زیادی برخوردار است. برای اینکه از امکانات و نحوه کار با این نرم‌افزار آشنا شوید باید به قسمت $Help$ آن یا کتاب‌هایی که در این زمینه نوشته شده است مراجعه کنید.

در این نرم‌افزار برای رسم منحنی یک تابع صریح یا ضمنی کافی است ابتدا معادله آن را بنویسید. سپس بر روی عبارت نوشته شده، راست کلیک کرده و با انتخاب گزینه $Plot$ و سپس $2-D\ Implicit\ Plot$ نمودار رسم می‌شود. به کمک ماوس و نوار ابزار بالای صفحه می‌توانید نمودار را به صورت‌های گوناگون مشاهده کنید. هم‌چنین اگر بر روی تصویر راست کلیک کنید گزینه‌های بیشتری در مقابل شما قرار می‌گیرد تا بتوانید منحنی را در حالت‌های گوناگون مشاهده و بررسی کنید.

در شکل زیر محیط نرم‌افزار میپل همراه با اجرای دو دستور را مشاهده می‌کنید.[1]



۱- در کتاب ریاضیات عمومی دو از نرم‌افزار میپل برای موارد زیر استفاده شده است:
رسم سطح‌های مختلف در فضا (فصل ۲)، رسم منحنی‌ها در فضا (فصل ۳)، رسم منحنی‌ها در مختصات قطبی (فصل ۴)، محاسبه لاپلاس و لاپلاس معکوس یک تابع (فصل ۸)، محاسبه مجموع جمله‌های یک سری (فصل ۹)، محاسبات مختلف در بحث ماتریس‌ها (فصل ۱۱)، حل معادله و حل دستگاه‌های چند معادله چند مجهولی (فصل ۱۱)

تمرین

۱- جدول تغییرات تابع داده شده را تنظیم و به کمک آن، نمودار تابع را رسم کنید.

۱) $f(x) = 2x - x^2$

۲) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

۳) $f(x) = (1 - x)^3$

۴) $f(x) = 3x^2 - x^3$

۵) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

۶) $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$

۷) $f(x) = x^4 - 6x^2$

۸) $f(x) = 4x^3 - x^4$

۹) $f(x) = x^4$

۱۰) $f(x) = 1 - (x - 1)^4$

۱۱) $f(x) = \frac{1}{x}$

۱۲) $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$

۱۳) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

۱۴) $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

۲- جدول تغییرات تابع داده شده را تنظیم و به کمک آن، نمودار تابع را رسم کنید.

۱) $f(x) = \frac{-2x}{x^2+1}$

۲) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

۳) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

۴) $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+4}$

۵) $f(x) = \cot x$

۶) $f(x) = \sec x$

۷) $f(x) = 2xe^x$

۸) $f(x) = x^2 e^x$

۹) $f(x) = x \, Ln \, x$

۱۰) $f(x) = \frac{x}{Ln \, x}$

۳- نمودار توابع تمرین۲ را به کمک یکی از نرم‌افزارهای ریاضی رسم کنید. بدین وسیله می‌توانید درستی اعمال خود را در تمرین قبل، بررسی کنید.

۴-۹ مسائل کاربردی ماکزیمم و می‌نیمم [1]

این بخش، مهمترین و شاید مشکل‌ترین قسمت فصل چهارم می‌باشد. زیرا برای حل یک مسئله باید حوصله کرد، اندیشید و کلیه آموخته‌های قبلی را به کار گرفت. در این بخش کاربرد ریاضیات را بیشتر احساس خواهید کرد.

روش‌هایی که برای یافتن مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم در بخش‌های قبل این فصل آموخته‌ایم در بسیاری از مسائل روزمره کاربرد عملی دارند. در روز عبارت‌هایی مانند بیشترین سود، کمترین هزینه، حداقل زمان ممکن، بزرگترین مقاومت، بیشترین ولتاژ، کمترین مساحت، بیشترین حجم، کمترین فاصله و یا عبارت‌های مشابه را فراوان می‌شنویم یا می‌خوانیم. در حل این نوع مسائل، بزرگترین مشکل بیان مسئله به زبان ریاضی است. برای این منظور باید متغیری که می‌خواهیم ماکزیمم یا می‌نیمم شود، به صورت تابعی از سایر متغیرهای مسئله بنویسیم. به محض یافتن تابع، تقریباً مسئله را حل شده محسوب می‌کنیم. زیرا قبلاً در محاسبه اکسترمم‌های یک تابع، تسلط کافی پیدا کرده‌ایم.

توصیه‌هایی برای حل مسائل کاربردی:

۱- برای اینکه به روشنی درک کنید مساله برای چه چیزی طرح شده، آن را چند بار با دقت بخوانید.

۲- در صورت امکان برای مسئله شکلی رسم کنید.

۳- متغیرهای موجود در مسئله را، نام گذاری کنید.

۴- تلاش کنید متغیری که می‌خواهد اکسترمم شود، برحسب سایر متغیرها بیان کنید.

۵- برای تابع جدید دامنه را مشخص کنید.

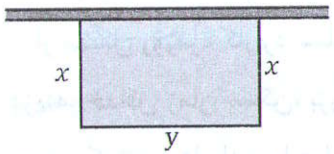
۶- برای یافتن اکسترمم تابع، روش‌هایی که در بخش‌های قبل بیان شده را به کار ببرید.

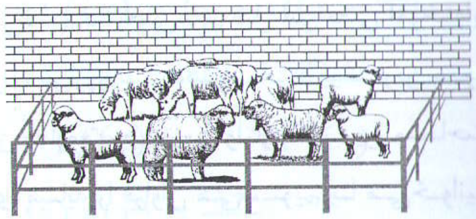
- در ذیل چند مثال به عنوان نمونه آمده است، آنها می‌توانند الگوهای مناسبی برای حل مسائل مشابه باشند.

۱- بعضی از مؤلفین این بحث را با عنوان **بهینه‌سازی** مورد بررسی قرار داده‌اند.

مثال ۱: فردی می‌خواهد در کنار دیوار باغ خود با ۲۰ متر نرده، زمینی مستطیل شکل برای نگهداری گوسفندان اختصاص دهد. ابعاد زمین را چگونه انتخاب کند تا مساحت زمین ماکزیمم شود.

حل: با انتخاب x و y برای ابعاد زمین و S برای مساحت داریم:





$$\begin{cases} ۲x + y = ۲۰ \to y = ۲۰ - ۲x \\ s = xy \end{cases} \to s(x) = x(۲۰ - ۲x) = ۲۰x - ۲x^۲$$

ابعاد زمین باید مثبت باشند، پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} ۰ < y \to ۰ < ۲۰ - ۲x \to x < ۱۰ \\ ۰ < x \end{matrix}\right\} \to ۰ < x < ۱۰$$

بدون اینکه خللی در حل مسئله به وجود آید می‌توان فرض کرد که: $۰ \le x \le ۱۰$ یعنی داشته باشیم[1]: $D_S = [۰,۱۰]$

تابع $s(x)$ یک تابع چندجمله‌ای است، پس بر فاصله بسته $[۰,۱۰]$ پیوسته می‌باشد و لذا می‌توانیم از قضیه اکسترمم مطلق برای یافتن مقدار ماکزیمم مطلق استفاده کنیم.

$s'(x) = ۲۰ - ۴x = ۰ \to x = ۵ \to x = ۰, ۵, ۱۰$ نقاط بحرانی

$s(۰) = ۰\ ,\ s(۱۰) = ۰\ ,\ s(۵) = ۵۰$

بنابراین با انتخاب $x = ۵$ و در نتیجه $y = ۱۰$، مساحت زمین ماکزیمم می‌شود.

۱- در این مسئله و یا در مسائل مشابه می‌دانیم طول یا عرض صفر مفید نیست ولی به کمک این نقاط اضافی، شرایط استفاده از قضیه‌های ریاضی را فراهم و به جواب سریع‌تر می‌رسیم.

مثال ۲: کارخانه‌ای در ماه x چتر زنانه تولید و هر یک را به قیمت $a = ۲۰۰ - ۰/۰۱x$ ریال می‌فروشد. ساختن x چتر، $c = ۵۰x + ۲۰۰۰$ ریال هزینه دارد. این کارخانه برای کسب بیشترین سود از طریق فروش این کالا، باید در ماه چند چتر تولید کند.

حل:

$R(x) = xa = x(۲۰۰ - ۰/۰۱x)$

$= ۲۰۰x - ۰/۰۱x^۲$ درآمد حاصل از فروش x چتر

$C(x) = ۵۰x + ۲۰۰۰$ هزینه تولید x چتر

$P(x) = R(x) - C(x)$

$= ۲۰۰x - ۰/۰۱x^۲ - ۵۰x - ۲۰۰۰$ سود حاصل از فروش x چتر

$P(x) = ۱۵۰x - ۰/۰۱x^۲ - ۲۰۰۰$ تابع سود $\quad , \quad D_P = [۰,+\infty)$

$P'(x) = ۱۵۰ - ۰/۰۲x = ۰ \to x = ۷۵۰۰$

$P''(x) = -۰/۰۲ \to P''(۷۵۰۰) = -۰/۰۲ < ۰$

بنابر قضیه آزمون مشتق دوم، ماکزیمم مقدار تابع در $x = ۷۵۰۰$ اتفاق می‌افتد[1].

بنابراین با تولید ۷۵۰۰ چتر در ماه، سود کارخانه بیشترین مقدار ممکن می‌شود.

تذکر: همان‌طور که در بخش ۴-۲ ذکر کردیم در بعضی از مسائل تابع داده شده پیوسته نمی‌باشد، به عنوان نمونه دامنه آن اعداد طبیعی است و اگر دامنه را $\mathbb{R}$ فرض کنیم، معمولاً تابع پیوسته و مشتق‌پذیر خواهد بود و می‌توان به کمک مطالب گفته شده اکسترمم‌های نسبی و مطلق را پیدا کرد. در چنین مسائلی، پس از به‌دست آوردن جواب اگر عدد حاصل غیر صحیح بود، جزء صحیح آن عدد را در نظر می‌گیریم و یا آن را به یک عدد صحیح گرد می‌کنیم. البته در مثال قبل تابع $P(x)$ طوری طراحی شده که پاسخ، عدد صحیح باشد.

۱- می‌توانید از آزمون مشتق دوم استفاده نکنید و با تعیین علامت $P'(x)$ به همین نتیجه برسید.

مثال ۳: هرگاه قیمت فروش کالایی x یورو و تعداد تقاضا برابر $۳۰x - ۶۰۰۰$ باشد، بیشترین درآمد به ازای چه قیمتی برای این کالا به دست می‌آید.

حل: ابتدا تابع درآمد را می‌نویسیم: $R(x) = x(۶۰۰۰ - ۳۰x)$

$$R'(x) = ۶۰۰۰ - ۶۰x = ۰ \to x = ۱۰۰$$
$$R''(x) = -۶۰ \to R''(۱۰۰) = -۶۰ < ۰$$

بنابر قضیه آزمون مشتق دوم، بیشترین درآمد با فروش هر کالا به قیمت ۱۰۰ یورو حاصل شود.

مثال ۴: کارخانه‌ای اجاق گازهای فردار تولید می‌کند. هزینه‌های ثابت این کارخانه در هر روز ۲۵۰ دلار و بر اساس تولید و فروش x اجاق در روز، هزینه متغیر $۹۰x$ دلار می‌باشد. قیمت فروش هر اجاق $۲۵۰ - x$ دلار تعیین شده و حداکثر تعداد تولید در روز ۹۰ اجاق می‌باشد. جهت رسیدن به سود ماکزیمم در یک روز، سطح تولید را بیابید.

حل:

$C(x) = ۹۰x + ۲۵۰$ هزینه در یک روز

$R(x) = x(۲۵۰ - x)$ درآمد در یک روز

$P(x) = R(x) - C(x)$ سود در یک روز

$$= x(۲۵۰ - x) - (۹۰x + ۲۵۰)$$
$$= -x^۲ + ۱۶۰x - ۲۵۰ \quad , \quad D_P = [۰,۹۰]$$

تابع $P(x)$ یک تابع چندجمله‌ای است، پس بر فاصله بسته $[۰,۹۰]$ پیوسته می‌باشد و لذا می‌توانیم از قضیه اکسترمم مطلق برای یافتن مقدار ماکزیمم مطلق استفاده کنیم.

$P'(x) = -۲x + ۱۶۰ = ۰ \to x = ۸۰ \to x = ۰, ۸۰, ۹۰$ نقاط بحرانی

$$P(۰) = -۲۵۰ \ , \ P(۸۰) = ۶۱۵۰ \ , \ P(۹۰) = ۶۰۵۰$$

بنابراین با انتخاب $x = ۸۰$ سود روزانه کارخانه بیشترین خواهد بود.

مثال ۵: یک سازنده گلدان‌های تزئینی می‌تواند بابت هر فرآورده خود ۲۰۰۰ ریال سود ببرد به شرطی که در ماه بیش از ۸۰۰ عدد تولید نکند. به ازای هر گلدان که مازاد بر ۸۰۰ عدد تولید کند، سود وی به اندازه ۲ ریال در هر عدد کاهش می‌یابد. او در ماه چند عدد گلدان بسازد تا بیشترین سود عایدش گردد.

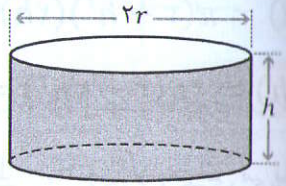
حل: هرگاه x تعداد تولید در ماه باشد، تابع سود به صورت زیر است:

$$P(x) = x\big(۲۰۰۰ - ۲(x - ۸۰۰)\big) \to P(x) = ۳۶۰۰x - ۲x^۲$$
$$P'(x) = ۳۶۰۰ - ۴x = ۰ \to x = ۹۰۰$$
$$P''(x) = -۴ \to P''(۹۰۰) < ۰$$

بنابر قضیه آزمون مشتق دوم، بیشترین سود با تولید ۹۰۰ گلدان در ماه اتفاق خواهد افتاد.

مثال ۶: یک شرکت تولید مواد غذایی می‌خواهد فرآورده‌های خود را در قوطی‌های فلزی استوانه‌ای شکل به حجم یک لیتر عرضه کند؛ ابعاد قوطی چگونه باید انتخاب شوند تا کمترین ورق فلز مصرف شود.

حل: اگر در این استوانه ارتفاع را با h، شعاع را با r، حجم را با v و سطح کل را با s نمایش دهیم، داریم:



$$\begin{cases} v = \pi r^۲ h = ۱۰۰۰\ cm^۳ \to h = \frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲} \\ s = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r h \end{cases}$$

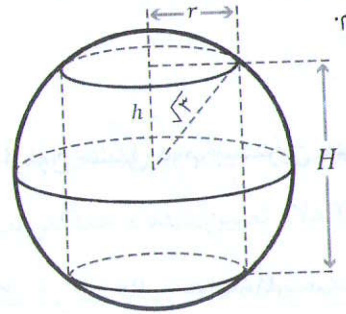
$$s(r) = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r\left(\frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲}\right)$$
$$\to s(r) = ۲\pi r^۲ + \frac{۲۰۰۰}{r} \quad , \quad D_s = (۰, +\infty)$$
$$s'(r) = ۴\pi r - \frac{۲۰۰۰}{r^۲} \to s'(r) = ۴\left(\frac{\pi r^۳ - ۵۰۰}{r^۲}\right)$$
$$s'(r) = ۰ \to \pi r^۳ - ۵۰۰ = ۰ \to r = \sqrt[۳]{\frac{۵۰۰}{\pi}} = \frac{۱۰}{\sqrt[۳]{۲\pi}} = ۵/۴۲ \ \ cm$$

چون $s''(۵/۴۲)$ مثبت است بنابر آزمون مشتق دوم به ازای $r = ۵/۴۲$ سطح کل قوطی می‌نیمم می‌شود، در این حالت داریم: $h = \frac{۱۰۰۰}{\pi(۵/۴۲)^۲} = ۱۰/۸۳$

به عبارت دیگر اگر قطر و ارتفاع یکسان باشند سطح کل استوانه می‌نیمم و در نتیجه مقدار ورق فلز مصرف شده به حداقل می‌رسد.

مثال ۷: می‌خواهیم با تراشیدن یک قطعه کروی شکل به شعاع ۳، یک استوانه بسازیم، ارتفاع استوانه را چقدر انتخاب کنیم تا حجم آن بیشترین مقدار باشد.

حل: ابتدا برای مسئله یک شکل رسم می‌کنیم.



اگر در این استوانه شعاع قاعده را با r، ارتفاع را با $H = ۲h$ و حجم را با v نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{cases} h^۲ + r^۲ = (\sqrt{۳})^۲ \rightarrow h^۲ + r^۲ = ۳ \rightarrow r^۲ = ۳ - h^۲ \\ v = \pi r^۲ H \rightarrow v = \pi r^۲(۲h) \end{cases}$$

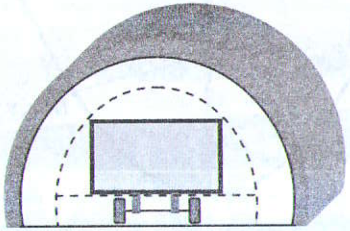
$$v(h) = \pi(۳ - h^۲)(۲h) \rightarrow v(h) = ۲\pi(۳h - h^۳) \ , \ D_v = [۰, \sqrt{۳}]$$

$$v'(h) = ۲\pi(۳ - ۳h^۲) = ۰ \rightarrow h^۲ = ۱ \rightarrow h = \pm ۱$$

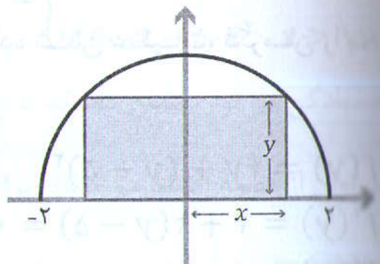
بنابراین برای تابع پیوسته v در فاصله بسته $[۰, \sqrt{۳}]$ نقاط ۰، ۱ و $\sqrt{۳}$ بحرانی می‌باشند و داریم: $v(۰) = ۰ \ , \ v(۱) = ۴\pi \ , \ v(\sqrt{۳}) = ۰$

پس بنابر قضیه اکسترمم مطلق با انتخاب $h = ۱$ حجم ماکزیمم می‌شود. یعنی ارتفاع استوانه باید برابر $H = ۲h = ۲$ باشد.

مثال ۸: برش عرضی کانال ورودی یک معدن قسمتی از یک دایره به شعاع ۳ متر می‌باشد. می‌خواهیم واگن‌هایی برای حمل مواد معدن طراحی کنیم که برش عرضی آنها به شکل مستطیل بوده و حریم مجاز عبور و مرور که یک نیم دایره به شعاع ۲ متر مانند شکل زیر است را رعایت کرده باشیم. ابعاد مستطیل را چگونه انتخاب کنیم تا برش عرضی این واگن‌ها بیشترین و در نتیجه حجم واگن با درازای ثابت ماکزیمم شود.



حل: به بیان ساده‌تر می‌خواهیم در یک نیم دایره به شعاع ۲ مستطیلی را قرار دهیم که مساحت آن بیشترین باشد. معادله یک دایره به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۲ عبارت است از: $x^۲ + y^۲ = ۴$، لذا معادله نیم دایره به صورت $y = \sqrt{۴ - x^۲}$ خواهد بود. هرگاه مساحت مستطیل را با s نمایش دهیم، داریم:



$$s = (۲x)y \ , ۰ \leq x \leq ۲$$

$$s(x) = ۲x\sqrt{۴ - x^۲} \ , \ D_s = [۰,۲]$$

$$s'(x) = ۲\sqrt{۴ - x^۲} + (۲x)\frac{-۲x}{۲\sqrt{۴ - x^۲}} = \frac{۸ - ۴x^۲}{\sqrt{۴ - x^۲}}$$

$$s'(x) = ۰ \rightarrow ۸ - ۴x^۲ = ۰ \rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$

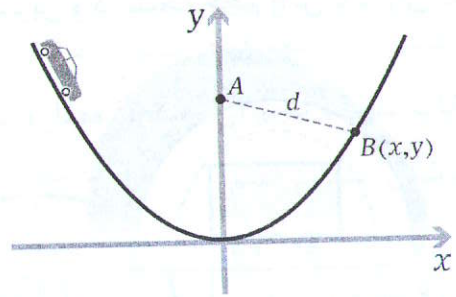
تابع s در فاصله بسته $[۰,۲]$ پیوسته است و نقاط بحرانی آن $\sqrt{۲}$، ۰ و ۲ می‌باشند و داریم: $s(\sqrt{۲}) = ۴ \ , \ s(۰) = ۰ \ , \ s(۲) = ۰$

بنابراین در $x = \sqrt{۲}$ مساحت ماکزیمم مطلق است و لذا ابعاد مستطیل عبارتند از:

$$۲x = ۲\sqrt{۲}\, m \quad , \quad y = \sqrt{۴ - x^۲} = \sqrt{۲}\, m$$

مثال ۹: جاده‌ای به شکل $x^2 = 4y$ است. در نقطه $A(0,5)$ بنای یادبودی قرار دارد. می‌خواهند در کنار جاده ایستگاه‌هایی برای توقف کوتاه مسافران، برای مشاهده بنا احداث کنند. در چه نقاطی این کار انجام شود تا مسافران بهترین دید را داشته باشند.

حل: ابتدا برای مسئله یک شکل رسم می‌کنیم:



فرض کنیم ایستگاه در نقطه $B(x,y)$ احداث شده است. زمانی مسافران بهترین دید را دارند که فاصله نقاط A و B کمترین مقدار باشد.

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{x^2 + (y-5)^2} = \sqrt{4y + (y-5)^2}$$

اگر در نقطه‌ای مقدار d می‌نیمم شود، در همین نقطه مقدار d^2 نیز می‌نیمم می‌شود و بالعکس. بنابراین برای یافتن چنین نقطه‌ای و برای ساده شدن عملیات، فکرمان را به می‌نیمم کردن d^2 متمرکز می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

$$f(y) = 4y + (y-5)^2 \quad , \quad D_f = [0, +\infty)$$
$$f'(y) = 4 + 2(y-5) = 2y - 6 \quad , \quad f''(y) = 2$$
$$f'(y) = 0 \to 2y - 6 = 0 \to y = 3$$

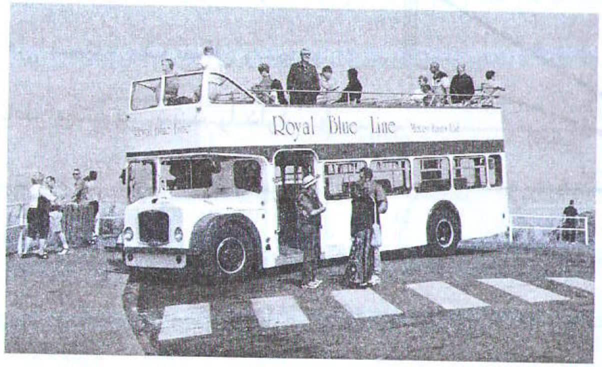
بنابراین داریم: $f'(3) = 0$ و $f''(3) > 0$. پس بنابر قضیه آزمون مشتق دوم، تابع f در $y = 3$ می‌نیمم نسبی دارد.

$$x^2 = 4y \xrightarrow{y=3} x^2 = 12 \to x = \pm 2\sqrt{3}$$

بنابراین نقاطی از جاده که کوتاهترین فاصله را تا بنای یادبود دارند عبارتند از:

$B_1(2\sqrt{3}, 3)$ و $B_2(-2\sqrt{3}, 3)$

مثال ۱۰: هزینه تور یک روزه یک شرکت جهانگردی برای زمانی که تعداد داوطلبان ۱۵۰ یا کمتر باشد ۱۵۰۰۰ تومان است، و اگر تعداد داوطلبان بیش از ۱۵۰ نفر شود، هزینه هر یک به اندازه ۵۰ تومان به ازای هر نفر مازاد بر ۱۵۰ نفر، تقلیل می‌یابد. اگر حداکثر ظرفیت تور ۳۰۰ نفر باشد، به ازای چند داوطلب، درآمد شرکت در این تور یک روزه بیشترین می‌شود.



حل: اگر x را تعداد داوطلبان در نظر بگیریم، تابع درآمد به صورت زیر می‌باشد:

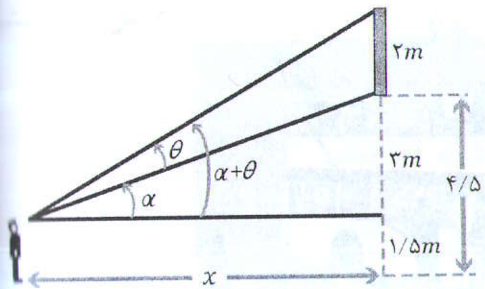
$$R(x) = \begin{cases} 15000x & x \le 150 \\ x(15000 - 50(x-150)) & x > 150 \end{cases} = \begin{cases} 15000x & x \le 150 \\ 22500x - 50x^2 & x > 150 \end{cases}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که تابع $R(x)$ پیوسته و دامنه آن $[0,300]$ می‌باشد و لذا می‌توان از قضیه اکسترمم مطلق برای یافتن مقدار ماکزیمم مطلق استفاده کرد.

$$R'(x) = \begin{cases} 15000 & x < 150 \\ \text{موجود نیست} & x = 150 \\ 22500 - 100x & x > 150 \end{cases} \quad , \quad \begin{array}{l} R'_-(150) = 15000 \ne R'_+(150) = 7500 \\ 22500 - 100x = 0 \to x = 225 \end{array}$$

پس نقاط بحرانی ۰، ۱۵۰، ۲۲۵ و ۳۰۰ می‌باشند. با محاسبه مقدار تابع در این نقاط، مشاهده می‌شود که بیشترین درآمد زمانی حاصل می‌شود که تعداد داوطلبان تور ۲۲۵ نفر باشد.

مثال ۱۱: سنگ نوشته‌ای که ۲ متر بلندی دارد بر دیوار یک کوه حک شده است. فاصله قسمت پایین این اثر تا سطح زمین ۴/۵ متر می‌باشد. سازمانی می‌خواهد در مقابل این اثر، سکویی احداث کند تا از آن نقطه بازدیدکنندگان بهتر بتوانند این اثر تاریخی را مشاهده کنند. با فرض اینکه قد متوسط افراد بازدید کننده ۱/۵ متر است، در چه فاصله‌ای از کوه باید این سکو ساخته شود.



حل: ابتدا برای حل مسئله یک شکل رسم می‌کنیم. زمانی ناظر بهترین دید را دارد که زاویه θ بیشترین مقدار باشد. پس می‌توان نوشت:

$$tan(\alpha+\theta)=\frac{۵}{x}\to \alpha+\theta=tan^{-۱}(\frac{۵}{x})$$

$$\to \theta=tan^{-۱}(\frac{۵}{x})-\alpha\to\theta=tan^{-۱}(\frac{۵}{x})-tan^{-۱}(\frac{۳}{x})$$

$$\to \theta(x)=tan^{-۱}(\frac{۵}{x})-tan^{-۱}(\frac{۳}{x})\quad,\quad D_\theta=(۰,+\infty)$$

$$\to \theta'(x)=\frac{-\frac{۵}{x^۲}}{۱+\frac{۲۵}{x^۲}}-\frac{-\frac{۳}{x^۲}}{۱+\frac{۹}{x^۲}}=\frac{-۵}{x^۲+۲۵}+\frac{۳}{x^۲+۹}=\frac{-۲x^۲+۳۰}{(x^۲+۲۵)(x^۲+۹)}$$

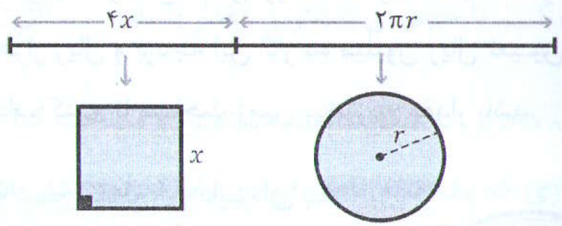
$$\theta'(x)=۰\to -۲x^۲+۳۰=۰\to x^۲=۱۵\xrightarrow{x>۰} x=\sqrt{۱۵}$$

بنابراین داریم: $\theta'(\sqrt{۱۵})=۰$ و $\theta''(\sqrt{۱۵})<۰$. پس بنابر قضیه آزمون مشتق دوم، تابع θ در $x=\sqrt{۱۵}$ ماکزیمم نسبی دارد. یعنی اگر سکو در فاصله $\sqrt{۱۵}$ متری کوه احداث شود، مسافران بهترین زاویه دید را خواهند داشت.

تذکر: در بعضی از مسائل، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق، به ازای نقاط انتهایی دامنه تابع حاصل می‌شود. مثال بعد، نمونه‌ای از این نوع می‌باشد.

مثال ۱۲: می‌خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۲۰ متر «یک مربع» یا «یک دایره» یا «یک مربع و یک دایره» بسازیم(مانند ساخت باغچه). این کار را چگونه انجام دهیم تا مساحت شکل یا مجموع مساحت شکل‌های ساخته شده الف) کمترین شود. ب) بیشترین شود.

حل: فرض کنیم می‌خواهیم سیم را به دو قسمت تقسیم کرده، با یک قسمت یک دایره و با قسمت دیگر یک مربع بسازیم. اگر طول ضلع مربع را با x، شعاع دایره را با r و مجموع مساحت‌ها را با A نمایش دهیم، داریم:



$s_۱=x^۲ \qquad s_۲=\pi r^۲$

$$\begin{cases}A=x^۲+\pi r^۲\\ ۴x+۲\pi r=۲۰\to r=\frac{۱}{\pi}(۱۰-۲x)\end{cases}$$

$$\to A(x)=x^۲+\pi(\frac{۱۰-۲x}{\pi})^۲\to A(x)=x^۲+\frac{۱}{\pi}(۴x^۲-۴۰x+۱۰۰)$$

$$=\frac{۱}{\pi}[(\pi+۴)x^۲-۴۰x+۱۰۰]$$

$$۰\le ۴x\le ۲۰\to ۰\le x\le ۵\to D_A=[۰,۵]$$

$A(x)$ یک تابع چندجمله‌ای می‌باشد، پس بر فاصله بسته $[۰,۵]$ پیوسته است و لذا می‌توان از قضیه اکسترمم مطلق برای یافتن مقدار ماکزیمم و می‌نیمم مطلق استفاده کرد.

$$A'(x)=\frac{۱}{\pi}[۲(\pi+۴)x-۴۰]=۰\to x=\frac{۲۰}{\pi+۴}=۲/۸$$

بنابراین نقاط بحرانی تابع A، ۵ ، ۲/۸ و ۰ می‌باشند و داریم:

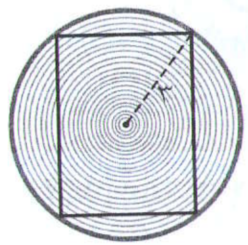
$$A(۵)=۲۵\quad,\quad A(۲/۸)=۱۴\quad,\quad A(۰)=۳۱/۸۳$$

بنابراین با انتخاب $x=۲/۸$ مجموع مساحت‌ها می‌نیمم می‌شود. یعنی باید قطعه سیم را به دو قسمت ۱۱/۲ و ۸/۸ سانتی‌متر تقسیم کنیم؛ و با انتخاب $x=۰$ مجموع مساحت‌ها ماکزیمم می‌شود. در این حالت تمام سیم را باید اختصاص به دایره بدهیم.

تمرین

۱- برای ایجاد یک ایستگاه هواشناسی، نیاز به زمینی هموار و مستطیل شکل به مساحت ۴۰۰ متر مربع می‌باشد. ابعاد زمین را طوری بیابید که هزینه حصارکشی کمترین مقدار شود.

۲- برای ایجاد یک مرکز پرورش ماهی، قرار است زمینی به شکل مستطیل در کنار رودخانه‌ای انتخاب و دور آن به جز ضلع مجاور رودخانه، نرده کشیده شود. اگر هزینه نرده کشی متری پنجاه هزار ریال و بودجه این کار ده میلیون ریال تعیین شده باشد، ابعاد زمین را چگونه انتخاب کنیم تا مساحت زمین بیشترین مقدار باشد.



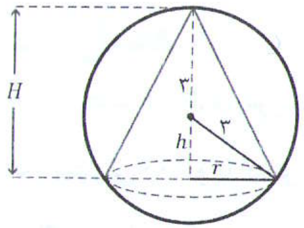
۳- از تنه یک درخت که سطح مقطع آن دایره‌ای به شعاع ۳ اینچ[1] می‌باشد، می‌خواهیم با برش، قطعه چوبی به شکل مکعب مسطیل (الوار) تولید کنیم. ابعاد سطح مقطع این قطعه چوب که به شکل مستطیل می‌باشد را چنان بیابید که حجم آن بیشترین باشد.

۴- یک کارخانه در ماه x جفت کفش مردانه تولید و هر جفت را به قیمت $۱۰۰۰ - ۰/۰۲x$ ریال می‌فروشد. ساختن x جفت کفش $۶۰۰x + ۲۰۰۰۰$ ریال هزینه دارد. این کارخانه برای کسب بیشترین سود، باید در ماه چند جفت کفش تولید کند.

۵- قسمتی از مسیر یک جاده به صورت $y = ۴ - x^۲$ می‌باشد. یک معدن در نقطه $(۰,۲)$ واقع است. می‌خواهیم با یک جاده فرعی معدن را به جاده اصلی متصل کنیم، طول کوتاهترین مسیری که برای این کار می‌توان انتخاب کرد چقدر می‌باشد.

۱- اینچ واحدی برای اندازه‌گیری طول بوده و برابر ۲/۵۴سانتی‌متر می‌باشد.

۶- می‌خواهیم با برش و جوش ورق‌های فلزی به ضخامت ۵ میلی‌متر، مخزنی استوانه‌ای شکل به حجم ۸ متر مکعب بسازیم. ابعاد مخزن را چگونه انتخاب کنیم تا وزن آن کمترین باشد.

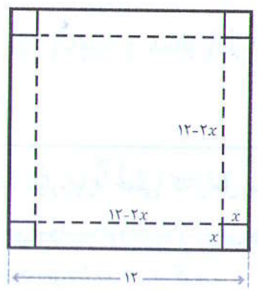


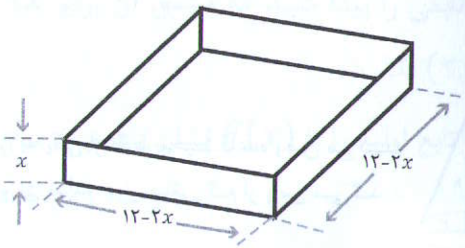
۷- می‌خواهیم با تراشیدن یک قطعه کروی شکل به شعاع ۳، یک مخروط بسازیم. ارتفاع مخروط را چقدر انتخاب کنیم تا حجم آن بیشترین مقدار باشد.

۸- می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل و مساحت کل ۲۴۰ سانتی‌متر مربع بسازیم به طوری که یک ضلع قاعده آن دو برابر ضلع دیگر باشد. ارتفاع این مکعب مستطیل را چنان بیابید که حجم آن بیشترین مقدار شود.

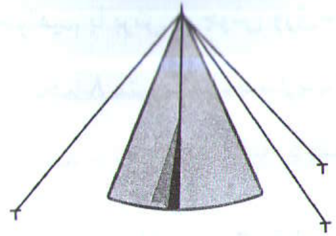
۹- می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل و حجم ۷۲ متر مکعب بسازیم به طوری که یک ضلع قاعده آن دو برابر ضلع دیگر باشد. ابعاد مکعب مستطیل را چنان بیابید که سطح کل آن کمترین مقدار شود.

۱۰- از یک قطعه مقوای مربع شکل به ضلع ۱۲ سانتی‌متر می‌خواهیم یک قوطی در باز بسازیم. برای این منظور از چهار گوشه این مقوا چهار مربع بریده اطراف آن را تا می‌کنیم. مربع‌های اطراف را به ضلع چند سانتی‌متر انتخاب کنیم تا گنجایش قوطی حاصل بیشترین مقدار باشد.

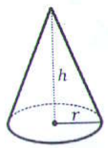




۱۱- اندازه مولّد[1] یک خیمه مخروطی شکل ۱۰ فوت است. ارتفاع خیمه را چقدر انتخاب کنیم تا فضای آن بیشترین مقدار شود.



۱۲- هزینه چاپ هر کارت عروسی برای زمانی که تعداد سفارش ۱۰۰ و یا کمتر باشد ۴۰۰ ریال است، و اگر تعداد سفارش بیش از ۱۰۰ شود، هزینه هر کارت به اندازه ۰/۵ ریال به ازای هر کارت مازاد بر ۱۰۰ عدد، تقلیل می‌یابد. اگر حداکثر تعداد سفارش یک مجلس عروسی ۵۰۰ کارت باشد، به ازای چند سفارش، درآمد چاپخانه در این مورد خاص بیشترین می‌شود.



۱- در مخروط دوّار، پاره خطی که رأس مخروط را به یکی از نقاط محیط قاعده وصل می‌کند، **مولّد** نامیده می‌شود. مخروط دوّار را می‌توان از دوران مولّد، حول خطی که از رأس می‌گذرد و بر قاعده عمود می‌باشد، تولید کرد.

فصل پنجم

انتگرال

۵-۱ مفهوم انتگرال و قوانین انتگرال‌گیری

در فصل سوم با عمل مشتق‌گیری از یک تابع آشنا شدید. در بسیاری از مسائل ریاضی و کاربردهای آن، عکس عمل مشتق‌گیری لازم است؛ یعنی مشتق تابع داده شده و به دنبال تابع اولیه هستیم. هر گاه تابع مشتق را با $f(x)$ و تابع اولیه را با $F(x)$ نمایش دهیم، داریم: $F'(x) = f(x)$

به عنوان نمونه هرگاه $f(x) = ۲x$ ، برای هر عدد حقیقی c هر تابع به صورت $F(x) = x^۲ + c$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ می‌باشد، زیرا: $F'(x) = ۲x$. بنابراین برای تابع $f(x)$ تعداد نامتناهی تابع اولیه می‌توان در نظر گرفت. تحت شرایط خاص، مقدار ثابت c را می‌توان مشخص کرد. مثال زیر این مطلب را توضیح می‌دهد.

مثال ۱: تابعی را پیدا کنید که مشتق آن برابر $f(x) = ۲x$ باشد و نمودار این تابع از نقطه $(۲,۳)$ بگذرد.

حل: اگر تابع اولیه را با $F(x)$ نشان دهیم داریم: $F(x) = x^۲ + c$ و $F(۲) = ۳$

$\rightarrow ۲^۲ + c = ۳ \rightarrow c = -۱ \rightarrow F(x) = x^۲ - ۱$

مثال ۲: تابع اولیه چند تابع آشنا در زیر معرفی شده است.

۱) $f(x) = 3x^2 \rightarrow F(x) = x^3 + c$

۲) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow F(x) = \sqrt{x} + c$

۳) $f(x) = \frac{-1}{x^2} \rightarrow F(x) = \frac{1}{x} + c$

۴) $f(x) = \cos x \rightarrow F(x) = \sin x + c$

۵) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow F(x) = \tan^{-1} x + c$

۶) $f(x) = e^x \rightarrow F(x) = e^x + c$

تذکر ۱: از این به بعد برای سهولت در عملیات یافتن تابع اولیه، تابع $F(x)$ را بدون ثابت c در نظر می‌گیریم. بنابراین اگر $F(x)$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ و c یک عدد حقیقی باشد، هر تابع به صورت $F(x) + c$ نیز یک تابع اولیه برای $f(x)$ است.

تعریف ۱: تابع $F(x) + c$ را انتگرال $f(x)$ نامیده و با نماد $\int f(x)\, dx$ نمایش می‌دهیم. عملی که ما را از $f(x)$ به عبارت $F(x) + c$ می‌رساند، انتگرال‌گیری می‌نامیم. هم‌چنین تابع f را تابع زیر انتگرال یا انتگرالده انتگرال و c را ثابت انتگرال گیری می‌گوییم.

تذکر ۲: عبارت $\int f(x)\, dx$ را **انتگرال نامعین** $f(x)$ یا به صورت مختصر انتگرال $f(x)$ می‌خوانیم. در فصل بعد به هر انتگرال بر روی یک فاصله، یک عدد نسبت می‌دهیم که آن را انتگرال معین می‌گوییم. آوردن لفظ نامعین، برای تفکیک بین این دو مطلب می‌باشد.

تذکر ۳: الف) با توجه به تعریف ۱، عمل انتگرال‌گیری عکس عمل مشتق‌گیری می‌باشد.
ب) در عبارت $\int f(x)\, dx$ ، dx نشان می‌دهد که متغیر انتگرال‌گیری x است. مفید بودن این نوع نمایش را در قسمت انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر احساس خواهید کرد.

نکته: در مورد انتخاب نماد $\int$ ، بعضی بر این باورند که این علامت از کشیده شدن حرف S در امتداد قائم به وجود آمده است. حرف S از ابتدای کلمه Sum به معنی مجموع گرفته شده است. شاید هم این علامت تغییر یافته حرف یونانی ς (سیگما) باشد[1]. در ریاضی از حرف سیگما برای نمایش مجموع تعداد متناهی یا نامتناهی جملات استفاده می‌شود. علت وابستگی نماد $\int$ به کلمه «**مجموع**» را در فصل ششم (فصل کاربرد انتگرال‌ها) مشاهده خواهید کرد.

مثال ۳: به کمک تعریف ۱، تابع اولیه مثال‌های ۱و۲ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

۱) $(x^2 + c)' = 2x \rightarrow \int 2x\, dx = x^2 + c$

۲) $(x^3 + c)' = 3x^2 \rightarrow \int 3x^2\, dx = x^3 + c$

۳) $(\sqrt{x} + c)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$

۴) $(\frac{1}{x} + c)' = \frac{-1}{x^2} \rightarrow \int \frac{-1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + c$

۵) $(\sin x + c)' = \cos x \rightarrow \int \cos x\, dx = \sin x + c$

۶) $(\tan^{-1} x + c)' = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

۷) $(e^x + c)' = e^x \rightarrow \int e^x\, dx = e^x + c$

توجه: مثال فوق نشان می‌دهد که مشابه عمل مشتق‌گیری، برای عمل انتگرال‌گیری نیز قوانینی وجود دارد که یافتن تابع اولیه را ساده‌تر می‌کند. در این کتاب **مجموعه قوانین انتگرال‌گیری را به پنج دسته تقسیم کرده‌ایم** و پس از بیان هر دسته به ذکر مثال‌هایی پرداخته‌ایم.

۱- حرف یونانی سیگما ($Sigma$) دارای سه نمایش است: $\Sigma, \sigma, \varsigma$

دسته اول قوانین انتگرال‌گیری: قانون‌های زیر به‌طور مستقیم از قانون‌های مشتق‌گیری نتیجه می‌شود.

۱) $\int dx = x + c$

۲) $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \quad , \quad (a \in \mathbb{R})$

۳) $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

۴) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad (n \neq -1)$

مثال ۴: انتگرال‌های زیر به کمک قوانین انتگرال‌گیری محاسبه شده‌اند.

۱) $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + c$

۲) $\int \frac{1}{y^3}\,dy = \int y^{-3}\,dy = \frac{y^{-3+1}}{-3+1} + c = \frac{y^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2y^2} + c$

۳) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

۴) $\int 4z^2\,dz = 4\int z^2\,dz = 4(\frac{z^3}{3}) + c = \frac{4}{3}z^3 + c$

۵) $\int (2x + \frac{1}{x^3})\,dx = \int 2x\,dx + \int \frac{1}{x^3}\,dx = x^2 - \frac{1}{2x^2} + c$

۶) $\int (u^2 - 3u + 5)\,du = \int u^2\,du - 3\int u\,du + 5\int du$

$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + 5u + c$

۷) $\int \frac{x^3+2x^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^3 + 2x^2)x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int (x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}})\,dx$

$= \int x^{\frac{5}{2}}\,dx + \int 2x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 2(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}) + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + c$

تذکر: پس از اینکه در محاسبه انتگرال‌ها مهارت کافی پیدا کردید، ضرورتی به تفکیک انتگرال‌ها نیست و می‌توانید جواب انتگرال را خلاصه‌تر بنویسید.

انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر:

در اغلب اوقات با انتگرال‌هایی مواجه می‌شویم که برای ما ناآشنا هستند، روش‌هایی وجود دارد که می‌توان این انتگرال‌ها را به انتگرال‌های آشنا تبدیل و حل کرد. یکی از روش‌هایی که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش تغییر متغیر نام دارد. درستی این روش بر اساس قانون مشتق تابع مرکب می‌باشد. با ذکر چند مثال با این روش آشنا می‌شویم؛ سپس بیان سایر قوانین انتگرال‌گیری را ادامه داده و در بخش بعد چند روش دیگر انتگرال‌گیری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۵: برای محاسبه $\int (2x-1)^3\,dx$ مراحل زیر را طی می‌کنیم.

ابتدا قرار می‌دهیم: $u = 2x - 1$ و سپس دیفرانسیل این عبارت را محاسبه می‌کنیم.

$$du = 2\,dx \rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

سپس انتگرال را برحسب متغیر u می‌نویسیم:

$$\int (2x-1)^3\,dx = \int u^3(\frac{1}{2}du) = \frac{1}{2}\int u^3\,du$$

جواب انتگرال اخیر به کمک قوانین انتگرال‌گیری به صورت زیر است:

$$\frac{1}{2}\int u^3\,du = \frac{1}{2}\frac{u^4}{4} + c = \frac{1}{8}u^4 + c$$

بنابراین داریم:

$$\int (2x-1)^3\,dx = \frac{1}{8}(2x-1)^4 + c$$

مثال ۶: برای محاسبه $\int x^2(x^3+2)^5\,dx$ مراحل زیر را طی می‌کنیم.

ابتدا قرار می‌دهیم: $u = x^3 + 2$ و سپس دیفرانسیل این عبارت را محاسبه می‌کنیم.

$$du = 3x^2\,dx \rightarrow x^2\,dx = \frac{1}{3}du$$

سپس انتگرال را برحسب متغیر u می‌نویسیم:

$$\int x^2(x^3+2)^5\,dx = \int (x^3+2)^5\,(x^2dx) = \int u^5\,(\frac{1}{3}du) = \frac{1}{3}\int u^5\,du$$

جواب انتگرال اخیر به کمک قوانین انتگرال‌گیری به صورت ذیل است:

$$\frac{1}{3}\int u^5\, du = \frac{1}{3}\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{18}u^6 + c$$

بنابراین داریم:

$$\int x^2(x^3+2)^5\, dx = \frac{1}{18}(x^3+2)^6 + c$$

مثال ۷ : انتگرال‌های زیر با توجه به توضیحات روش تغییر متغیر در دو مثال قبل، حل شده‌اند.

۱) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{3x^2-1}}$

$u = 3x^2 - 1 \rightarrow du = 6x\, dx \rightarrow x\, dx = \frac{1}{6}du$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{3x^2-1}} = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{1}{6}du\right) = \frac{1}{6}\int u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{6}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + c$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + c = \frac{1}{3}\sqrt{u} + c = \frac{1}{3}\sqrt{3x^2-1} + c$$

۲) $\int x\sqrt{1+x}\, dx$

$u = 1 + x \rightarrow (du = dx\,,\ x = u - 1)$

$$\int x\sqrt{1+x}\, dx = \int (u-1)\sqrt{u}\, du = \int (u-1)u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{u^5} - \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} + c$$

۳) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}dx$

$u = x + 2 \rightarrow (du = dx\,, x = u - 2)$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}dx = \int \frac{(u-2)^2}{\sqrt{u}}du = \int u^{-\frac{1}{2}}(u^2 - 4u + 4)\, du$$

$$= \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 4u^{\frac{1}{2}} + 4u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 4\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + 4\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{(x+2)^3} + 8\sqrt{(x+2)} + c$$

دسته دوم قوانین انتگرال‌گیری: قوانین زیر از مشتق توابع مثلثاتی به‌دست آمده‌اند.

۱) $(\sin x)' = \cos x \rightarrow \int \cos x\, dx = \sin x + c$

۲) $(\cos x)' = -\sin x \rightarrow \int \sin x\, dx = -\cos x + c$

۳) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$$\rightarrow \int (1 + \tan^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

۴) $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

$$\rightarrow \int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$$

۵) $(\sec x)' = \sec x\ \tan x \rightarrow \int \sec x\ \tan x\, dx = \sec x + c$

۶) $(\csc x)' = -\csc x\ \cot x \rightarrow \int \csc x\ \cot x\, dx = -\csc x + c$

مثال ۸: انتگرال‌های زیر به کمک قوانینی که تا کنون خوانده‌ایم حل شده‌اند.

۱) $\int (5\sin x - 3\cos x)\, dx = -5\cos x - 3\sin x + c$

۲) $\int \cos 2x\, dx$

$u = 2x \rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos u\, du = \frac{1}{2}\sin u + c = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

۳) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

$u = \sin x \rightarrow du = \cos x\, dx$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3}\, du = \frac{u^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2u^2} + c = \frac{-1}{2\sin^2 x} + c$$

۴) $\int x\sin(x^2 + 1)\, dx$

$u = x^2 + 1 \rightarrow du = 2x\, dx \rightarrow x\, dx = \frac{1}{2}du$

$$\int x\sin(x^2+1)\, dx = \frac{1}{2}\int \sin u\, du = \frac{-1}{2}\cos u + c$$

$$= \frac{-1}{2}\cos(x^2+1) + c$$

۵) $\int \sin ۲x \cos^۵ ۲x\, dx$

$u = \cos ۲x \to du = -۲\sin ۲x\, dx \to \sin ۲x\, dx = \frac{-۱}{۲} du$

$$\int \sin ۲x \cos^۵ ۲x\, dx = \frac{-۱}{۲}\int u^۵\, du = \frac{-۱}{۲}\frac{u^۶}{۶} + c = \frac{-۱}{۱۲}\cos^۶ ۲x + c$$

۶) $\int \cos x \sqrt{۲ + \sin x}\, dx$

$u = ۲ + \sin x \to du = \cos x\, dx$

$$\int \cos x \sqrt{۲ + \sin x}\, dx = \int \sqrt{u}\, du = \int u^{\frac{۱}{۲}}\, du = \frac{u^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} + c$$

$$= \frac{۲}{۳}\sqrt{u^۳} + c = \frac{۲}{۳}\sqrt{(۲ + \sin x)^۳} + c$$

۷) $\int (۱ + \tan^۲ ۵x)\, dx$

$u = ۵x \to du = ۵\, dx \to dx = \frac{۱}{۵} du$

$$\int (۱ + \tan^۲ ۵x)\, dx = \frac{۱}{۵}\int (۱ + \tan^۲ u)\, du = \frac{۱}{۵}\tan u + c$$

$$= \frac{۱}{۵}\tan(۵x) + c$$

۸) $\int \frac{۱}{\sin^۲ ۳x} dx$

$u = ۳x \to du = ۳\, dx \to dx = \frac{۱}{۳} du$

$$\int \frac{۱}{\sin^۲ ۳x} dx = \frac{۱}{۳}\int \frac{۱}{\sin^۲ u} du = \frac{۱}{۳}\int \csc^۲ u\, du$$

$$= \frac{-۱}{۳}\cot u + c = \frac{-۱}{۳}\cot ۳x + c$$

۹) $\int \sec^۲(۳x - ۱)\, dx$

$u = ۳x - ۱ \to du = ۳\, dx \to dx = \frac{۱}{۳} du$

$$\int \sec^۲(۳x - ۱)\, dx = \frac{۱}{۳}\int \sec^۲ u\, du = \frac{۱}{۳}\tan u + c = \frac{۱}{۳}\tan(۳x - ۱) + c$$

۱۰) $\int \sec(۵x + ۲)\tan(۵x + ۲)\, dx$

$u = ۵x + ۲ \to du = ۵\, dx \to dx = \frac{۱}{۵} du$

$$\int \sec(۵x + ۲)\tan(۵x + ۲)\, dx = \frac{۱}{۵}\int \sec u\ \tan u\, du$$

$$= \frac{۱}{۵}\sec u + c = \frac{۱}{۵}\sec(۵x + ۲) + c$$

مثال ۹: بعضی از انتگرال‌های شامل توابع مثلثاتی به کمک **اتحادهای مثلثاتی یا دسته‌بندی مناسب** قابل حل می‌باشند. در نمونه‌های زیر با بعضی از آنها آشنا می‌شوید.

۱) $\int \sin^۲ x\, dx = \int \frac{۱-\cos ۲x}{۲} dx = \frac{۱}{۲}\int dx - \frac{۱}{۲}\int \cos ۲x\, dx$

$= \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x + c$ (بنا بر مثال ۸ قسمت دوم)

۲) $\int \cos^۲ x\, dx = \int \frac{۱+\cos ۲x}{۲} dx = \frac{۱}{۲}\int dx + \frac{۱}{۲}\int \cos ۲x\, dx$

$= \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}\sin ۲x + c$ (بنا بر مثال ۸ قسمت دوم)

۳) $\int \sin^۳ x\, dx = \int \sin x \sin^۲ x\, dx = \int \sin x\ (۱ - \cos^۲ x)\, dx$

$u = \cos x \to du = -\sin x\, dx \to \sin x\, dx = -du$

$$\int \sin^۳ x\, dx = -\int (۱ - u^۲)\, du = -u + \frac{۱}{۳}u^۳ + c$$

$$= -\cos x + \frac{۱}{۳}\cos^۳ x + c$$

۴) $\int \sec^۲ x \tan x\, dx = \int \sec x (\sec x \tan x)\, dx$

$u = \sec x \to du = \sec x \tan x\, dx$

$$\int \sec^۲ x \tan x\, dx = \int u\, du = \frac{۱}{۲}u^۲ + c = \frac{۱}{۲}\sec^۲ x + c$$

۵) $\int \tan^۲ x\, dx = \int [(\tan^۲ x + ۱) - ۱]\, dx$

$$= \int (\tan^۲ x + ۱)\, dx - \int dx = \tan x - x + c$$

۶) $\int \sin ۳x \cos ۲x\, dx = \int \frac{۱}{۲}[\sin(۳x + ۲x) + \sin(۳x - ۲x)]\, dx$

$$= \frac{۱}{۲}\int \sin ۵x\, dx + \frac{۱}{۲}\int \sin x\, dx = \frac{-۱}{۱۰}\cos ۵x - \frac{۱}{۲}\cos x + c$$

۷) $\int \sin^۲ x \cos^۲ x\, dx = \int (\sin x \cos x)^۲\, dx = \int (\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲\, dx$

$$= \frac{۱}{۴}\int \sin^۲ ۲x\, dx = \frac{۱}{۴}\int \frac{۱-\cos ۴x}{۲} dx = \frac{۱}{۸}\int dx - \frac{۱}{۸}\int \cos ۴x\, dx$$

$$= \frac{۱}{۸}x - \frac{۱}{۳۲}\sin ۴x + c$$

۸) $\int \tan^3 x\,dx = \int \tan x\,(\tan^2 x + 1 - 1)\,dx$

$= \int \tan x\,(\tan^2 x + 1)\,dx - \int \tan x\,dx$

$(u = \tan x \to du = (\tan^2 x + 1)\,dx)$

$= \int u\,du - \int \tan x\,dx = \frac{1}{2}u^2 - \int \tan x\,dx$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + c$

تذکر : به کمک دسته چهارم قوانین انتگرال‌گیری در چند صفحه بعد داریم: $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

مثال ۱۰: اگر $f'(x) = \sqrt[3]{x+5}$ و $f(3) = 15$ ، ضابطه تابع f را بیابید.

حل :

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \sqrt[3]{x+5}\,dx = \int \sqrt[3]{u}\,du$

$(u = x + 5 \to du = dx)$

$= \int u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+5)^4} + c$

$\to f(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+5)^4} + c$

$f(3) = 15 \to \frac{3}{4}\sqrt[3]{(3+5)^4} + c = 15 \to \frac{3}{4}(16) + c = 15 \to c = 3$

$\to f(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+5)^4} + 3$

مثال ۱۱: اگر $f''(x) = \cos x$ و $f'(\frac{\pi}{2}) = 3$ و $f(\frac{\pi}{2}) = \pi$ ، ضابطه تابع f را بیابید.

حل :

$f'(x) = \int f''(x)dx = \int \cos x\,dx = \sin x + c_1$

$f'(\frac{\pi}{2}) = 3 \to \sin(\frac{\pi}{2}) + c_1 = 3 \to 1 + c_1 = 3 \to c_1 = 2$

$\to f'(x) = \sin x + 2$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int(\sin x + 2)\,dx = -\cos x + 2x + c_2$

$f(\frac{\pi}{2}) = \pi \to -\cos(\frac{\pi}{2}) + 2(\frac{\pi}{2}) + c_2 = \pi \to 0 + \pi + c_2 = \pi \to c_2 = 0$

$\to f(x) = -\cos x + 2x$

تمرین

۱- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int(x^2 - 2x + 3)\,dx$
۲) $\int(2x^4 - 5x^2 + 1)\,dx$
۳) $\int(\frac{1}{u^2} - 5u)\,du$
۴) $\int(\frac{2}{u^3} - \frac{3}{u^2})\,du$
۵) $\int(\sqrt[3]{z^2} + \sqrt{z})\,dz$
۶) $\int(2\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}})\,dz$
۷) $\int \sqrt[3]{x}\,(x+2)\,dx$
۸) $\int \sqrt{x}\,(x^2 + 1)\,dx$
۹) $\int \frac{u^2 + 3\sqrt{u}}{\sqrt[3]{u}}\,du$
۱۰) $\int \frac{u^2 - 5\sqrt[3]{u}}{u\sqrt{u}}\,du$

۲- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int(\frac{1}{2}x - 2)^4\,dx$
۲) $\int(5x - 3)^4\,dx$
۳) $\int x(2x^2 + 3)^6\,dx$
۴) $\int x^2(5 - x^3)^7\,dx$
۵) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x)^3}\,dx$
۶) $\int \frac{3x^2+1}{(x^3+x)^4}\,dx$
۷) $\int \sqrt{2x+3}\,dx$
۸) $\int \sqrt[3]{x+4}\,dx$
۹) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$
۱۰) $\int x^2\,\sqrt[3]{x^3+2}\,dx$
۱۱) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,dx$
۱۲) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \sqrt{x}}\,dx$
۱۳) $\int 2x\,\sqrt{2x+3}\,dx$
۱۴) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+2}}\,dx$
۱۵) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$
۱۶) $\int x^2\,\sqrt[3]{x+1}\,dx$

۳- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \sin 4x\,dx$
۲) $\int \cos 3x\,dx$
۳) $\int \cos(\frac{1}{2}x)\,dx$
۴) $\int \sin(\frac{1}{2}x)\,dx$

۵) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ ۶) $\int \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})\,dx$

۷) $\int x^2 \sin(x^3-1)\,dx$ ۸) $\int 3x\cos(2-x^2)\,dx$

۹) $\int(1+\tan^2 3x)\,dx$ ۱۰) $\int(1+\cot^2 5x)\,dx$

۱۱) $\int \sec^2 2x\,dx$ ۱۲) $\int x\csc^2(x^2)\,dx$

۱۳) $\int \csc(2x+3)\cot(2x+3)\,dx$ ۱۴) $\int \sec(2-x)\tan(2-x)\,dx$

۱۵) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}dx$ ۱۶) $\int \cos x\,(2+\sin x)^3\,dx$

۱۷) $\int \sin^3 5x\cos 5x\,dx$ ۱۸) $\int \frac{\sin 4x}{\cos^2 4x}dx$

۴- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \cos^2 3x\,dx$ ۲) $\int \sin^2 4x\,dx$

۳) $\int \sin^3 4x\,dx$ ۴) $\int \cos^3 2x\,dx$

۵) $\int \sec^2 2x\tan 2x\,dx$ ۶) $\int \csc^2 3x\cot 3x\,dx$

۷) $\int \cot^2 x\,dx$ ۸) $\int \tan^2 2x\,dx$

۹) $\int \sin 3x\sin x\,dx$ ۱۰) $\int \cos 3x\cos 2x\,dx$

۵- تابع $f(x)$ را با شرایط داده شده بیابید.

۱) $f'(x)=x^2+3x \quad , \quad f(1)=2$

۲) $f'(x)=\cos 2x \quad , \quad f(\frac{\pi}{2})=1$

۳) $f'(x)=\sqrt{x+2} \quad , \quad f(2)=\frac{1}{3}$

۴) $f'(x)=x\sin x^2 \quad , \quad f(0)=2$

۵) $f''(x)=\sin x \quad , \quad f'(\pi)=3 \quad , \quad f(0)=1$

۶) $f''(x)=3x \quad , \quad f'(1)=2 \quad , \quad f(1)=0$

ادامه قوانین انتگرال‌گیری

دسته سوم قوانین انتگرال‌گیری: قوانین زیر از مشتق توابع معکوس مثلثاتی به‌دست آمده است[1].

۱) $(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+c$

۲) $(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2} \rightarrow \int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+c$

۳) $(\sec^{-1}x)'=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \rightarrow \int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\sec^{-1}|x|+c$

از سه فرمول انتگرال‌گیری فوق با فرض $a>0$ و به کمک تغییر متغیر $u=\frac{x}{a}$، سه فرمول زیر را می‌توان نتیجه گرفت. در مثال بعد اثبات یکی از این فرمول‌ها را آورده‌ایم.

۴) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}(\frac{x}{a})+c$

۵) $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a})+c$

۶) $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx=\frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+c$

مثال ۱۲: اثبات فرمول انتگرال‌گیری شماره۴ به کمک فرمول شماره۱ به شرح زیر می‌باشد. لازم به یادآوری است که $a>0$ می‌باشد.

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}dx=\int\frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\frac{1}{a}dx$$

$(u=\frac{x}{a}\rightarrow du=\frac{1}{a}dx)$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\sin^{-1}u+c=\sin^{-1}(\frac{x}{a})+c$$

۱- ممکن است برای انتگرال‌های ۳و۶ در کتاب‌های دیگر فرمول‌هایی بدون قدرمطلق مشاهده کنید. علت این می‌باشد که در محدود کردن دامنه تابع سکانت برای اینکه معکوس داشته باشد نظر یکسانی وجود ندارد. اگر برای تابع $\sec x$ دامنه را مجموعه $[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$ انتخاب کنیم در فرمول مشتق $\sec^{-1}x$ و در انتگرال نظیر آن، قدرمطلق ظاهر می‌شود.

مثال ۱۳: انتگرال‌های زیر به کمک قوانینی که تا کنون خوانده‌ایم حل شده‌اند.

۱) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx = sin^{-1}(\frac{x}{2}) + c$

۲) $\int \frac{4}{9+x^2}dx = 4\int \frac{1}{3^2+x^2}dx = 4(\frac{1}{3})\,tan^{-1}(\frac{x}{3}) + c$

۳) $\int \frac{1}{3x\sqrt{9x^2-1}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}du = \frac{1}{3}\,sec^{-1}|u| + c$

$= \frac{1}{3}\,sec^{-1}|3x| + c$

$u = 3x \rightarrow du = 3\,dx \rightarrow dx = \frac{1}{3}du$

۴) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{2^2-u^2}} = \frac{1}{3}\,sin^{-1}(\frac{u}{2}) + c = \frac{1}{3}\,sin^{-1}(\frac{3x}{2}) + c$

$u = 3x \rightarrow du = 3\,dx \rightarrow dx = \frac{1}{3}du$

۵) $\int \frac{dx}{4x^2+25} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+5^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,tan^{-1}(\frac{u}{5}) + c = \frac{1}{10}\,tan^{-1}(\frac{2x}{5}) + c$

$u = 2x \rightarrow du = 2\,dx \rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

۶) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{du}{u^2+2^2} = \frac{1}{2}tan^{-1}(\frac{u}{2}) + c = \frac{1}{2}tan^{-1}(\frac{x+1}{2}) + c$

$x^2 + 2x + 5 = (x^2 + 2x + 1) + 4 = (x+1)^2 + 2^2 = u^2 + 2^2$

$u = x + 1 \rightarrow du = dx$

۷) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}} = \int \frac{du}{\sqrt{2^2-u^2}} = sin^{-1}(\frac{u}{2}) + c = sin^{-1}(\frac{x+1}{2}) + c$

$3 - x^2 - 2x = 4 - (x^2 + 2x + 1) = 2^2 - (x+1)^2 = 2^2 - u^2$

$u = x + 1 \rightarrow du = dx$

۸) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-(x^3)^2}}$

$u = x^3 \rightarrow du = 3x^2\,dx \rightarrow x^2\,dx = \frac{1}{3}du$

$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3}sin^{-1}\,u + c = \frac{1}{3}sin^{-1}(x^3) + c$

دسته چهارم قوانین انتگرال‌گیری: قوانین زیر از مشتق توابع نمایی و لگاریتمی بدست آمده است.

۱) $(a^x)' = (Ln\,a)\,a^x \rightarrow \int a^x\,dx = \frac{1}{Ln\,a}\,a^x + c$

برای حالت قبل با فرض $a = e$ داریم:

۲) $(e^x)' = e^x \rightarrow \int e^x\,dx = e^x + c$

۳) $(Ln\,x)' = \frac{1}{x} \rightarrow \int \frac{1}{x}dx = Ln|x| + c$

مثال ۱۴: انتگرال‌های زیر به کمک قوانینی که تا کنون خوانده‌ایم حل شده‌اند.

۱) $\int 2^x\,dx = \frac{1}{Ln\,2}\,2^x + c$

۲) $\int e^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{3x+1} + c$

$u = 3x + 1 \rightarrow du = 3\,dx \rightarrow dx = \frac{1}{3}du$

۳) $\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}Ln|u| + c = \frac{1}{2}\,Ln|2x-1| + c$

$u = 2x - 1 \rightarrow du = 2\,dx \rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

۴) $\int cos\,3x\,e^{sin\,3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{sin\,3x} + c$

$u = sin\,3x \rightarrow du = 3\,cos\,3x\,dx \rightarrow cos\,3x\,dx = \frac{1}{3}du$

۵) $\int x\,3^{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int 3^u\,du = \frac{1}{2\,Ln\,3}3^u + c = \frac{3^{x^2+2}}{2\,Ln\,3} + c$

$u = x^2 + 2 \rightarrow du = 2x\,dx \rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du$

۶) $\int \frac{e^x}{e^x+3}dx = \int \frac{1}{u}du = Ln|u| + c = Ln|e^x + 3| + c$

$u = e^x + 3 \rightarrow du = e^x\,dx$

۷) $\int tan\,x\,dx = \int \frac{sin\,x}{cos\,x}dx = -\int \frac{du}{u} = -Ln|u| + c = -Ln|cos\,x| + c$

$u = cos\,x \rightarrow du = -sin\,x\,dx \rightarrow sin\,x\,dx = -du$

دسته پنجم قوانین انتگرال‌گیری: قوانین زیر از مشتق توابع هیپربولیک به‌دست آمده است.

$$(\sinh x)' = \cosh x \rightarrow \int \cosh x\, dx = \sinh x + c$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \rightarrow \int \sinh x\, dx = \cosh x + c$$

$$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x \rightarrow \int (1 - \tanh^2 x)\, dx = \tanh x + c$$

$$(\coth x)' = 1 - \coth^2 x \rightarrow \int (1 - \coth^2 x)\, dx = \coth x + c$$

مثال ۱۵: انتگرال‌های زیر به کمک قوانینی که تا کنون خوانده‌ایم حل شده‌اند.

۱) $\int \sinh 5x\, dx = \frac{1}{5}\int \sinh u\, du = \frac{1}{5}\cosh u + c = \frac{1}{5}\cosh 5x + c$

$u = 5x \rightarrow du = 5\, dx \rightarrow dx = \frac{1}{5} du$

۲) $\int \frac{\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \cosh u\, du = 2\sinh u + c = 2\sinh\sqrt{x} + c$

$u = \sqrt{x} \rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\, du$

۳) $\int x(1 - \tanh^2 x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int (1 - \tanh^2 u)\, du$

$= \frac{1}{2}\tanh u + c = \frac{1}{2}\tanh x^2 + c$

$u = x^2 \rightarrow du = 2x\, dx \rightarrow x\, dx = \frac{1}{2} du$

۴) $\int \tanh^2 x\; dx = \int [1 - (1 - \tanh^2 x)]\, dx$

$= \int dx - \int (1 - \tanh^2 x)\, dx$

$= x - \tanh x + c$

تمرین

۱- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ۲) $\int \frac{1}{2(x^2+1)} dx$

۳) $\int \frac{5}{2(x^2+1)} dx$ ۴) $\int \frac{1}{\sqrt{4(1-x^2)}} dx$

۵) $\int \frac{4}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ ۶) $\int \frac{-2}{3x\sqrt{x^2-1}} dx$

۷) $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$ ۸) $\int \frac{3}{\sqrt{25-x^2}} dx$

۹) $\int \frac{5}{4+x^2} dx$ ۱۰) $\int \frac{4}{5+x^2} dx$

۱۱) $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx$ ۱۲) $\int \frac{1}{4x^2+9} dx$

۱۳) $\int \frac{5}{4+(x+3)^2} dx$ ۱۴) $\int \frac{2}{\sqrt{4-(x+3)^2}} dx$

۱۵) $\int \frac{1}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx$ ۱۶) $\int \frac{1}{4x^2+4x+5} dx$

۱۷) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ ۱۸) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}} dx$

۱۹) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ ۲۰) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

۲- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int e^{2-5x}\, dx$ ۲) $\int x e^{4-x^2}\, dx$

۳) $\int \sin x\; 2^{\cos x}\, dx$ ۴) $\int 5^{3-2x}\, dx$

۵) $\int \frac{1}{3-2x} dx$ ۶) $\int \frac{5}{4+3x} dx$

۷) $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$ ۸) $\int \frac{3x}{x^2+4} dx$

۹) $\int \tan 2x\, dx$ ۱۰) $\int \cot 7x\, dx$

۱۱) $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$ ۱۲) $\int \frac{5^x}{5^x+1}dx$

۱۳) $\int \frac{1}{x\,Ln\,x}dx$ ۱۴) $\int \frac{Ln\,x}{x}dx$

۱۵) $\int \frac{1+e^x}{e^{2x}}dx$ ۱۶) $\int 3^{2x}e^x\,dx$

۱۷) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-(Ln\,x)^2}}dx$ ۱۸) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

۳- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int x\sinh(x^2+1)\,dx$ ۲) $\int x^2\cosh(4+x^3)\,dx$

۳) $\int \frac{1}{x^2}\cosh(\frac{1}{x})\,dx$ ۴) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sinh\sqrt{x}\,dx$

۵) $\int x^2\,[1-\tanh^2(x^3+1)]\,dx$ ۶) $\int(2x+1)\,[1-\coth^2(x^2+x)]\,dx$

۴- تابع $f(x)$ را با شرایط داده شده بیابید.

۱) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}$

۲) $f'(x)=\frac{1}{4+x^2}$, $f(2)=\frac{\pi}{6}$

۳) $f'(x)=e^{2x-1}$, $f(\frac{1}{2})=2$

۴) $f'(x)=\frac{1}{x+3}$, $f(-2)=1$

۵) $f'(x)=\sinh(2x)$, $f(0)=2$

۶) $f'(x)=\cosh(\frac{1}{2}x)$, $f(0)=-1$

۲-۵ روش‌های انتگرال‌گیری

بعضی از انتگرال‌ها را به کمک قوانین انتگرال‌گیری که تا کنون خوانده‌ایم نمی‌توان حل کرد. غیر از قوانین گفته شده، روش‌هایی وجود دارد که به کمک آنها انتگرال را می‌توان به شکلی تبدیل نمود که قابل حل به کمک قوانین باشد. یکی از مهمترین روش‌ها، روش تغییر متغیر می‌باشد؛ این روش خود حاوی روش‌های متعددی می‌باشد. بنابر ضرورت، روش تغییر متغیر معمولی را در بخش قبل بیان کردیم. دو نوع روش تغییر متغیر دیگر، به نام‌های روش تغییر متغیر مثلثاتی و روش تغییر متغیر وایرشتراس را در صفحات آینده توضیح خواهیم داد. غیر از روش تغییر متغیر، روش جزء‌به‌جزء و روش انتگرال‌گیری از توابع گویا به کمک تجزیه کسرها، از روش‌های مهم انتگرال‌گیری می‌باشند. ما این روش‌ها را با توجه به اهمیت و ارتباطی که با یکدیگر دارند به ترتیب زیر بیان کرده‌ایم.

- روش‌های انتگرال‌گیری
  - روش تغییر متغیر
    - ۱) تغییر متغیر معمولی
    - ۴) تغییر متغیر مثلثاتی
    - ۵) تغییر متغیر وایرشتراس
  - ۲) روش جزء به جزء
  - ۳) روش انتگرال‌گیری از توابع گویا به وسیله تجزیه کسرها

۱- روش تغییر متغیر معمولی:

با این روش در بخش (۵-۱) آشنا شدیم و به کمک آن انتگرال‌های متعددی را حل کردیم، بعضی از آن مثال‌ها به صورت زیر بود:

$$\int(2x-1)^5\,dx=\frac{1}{2}\int u^5\,du=\cdots \quad , \quad u=2x-1$$

$$\int\frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}dx=\frac{3}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=\cdots \quad , \quad u=x^2+5$$

$$\int e^{5x-3}\,dx=\frac{1}{5}\int e^u\,du=\cdots \quad , \quad u=5x-3$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\cdots \quad , \quad u=2x$$

$$\int\sin x\,\cos^3 x\,dx=-\int u^3\,du=\cdots \quad , \quad u=\cos x$$

۲- انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء

مشاهده کردید هر قانون انتگرال‌گیری با یک قانون مشتق‌گیری متناظر می‌باشد. متناظر با قانون مشتق‌تابع مرکب، روش تغییر متغیر را معرفی کردیم. اکنون متناظر با قانون مشتق‌حاصل ضرب دو تابع، روشی دیگر برای انتگرال‌گیری بیان می‌کنیم. فرض کنید u و v توابعی مشتق‌پذیر از x باشند. بنابر قانون مشتق حاصل ضرب دو تابع داریم:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \rightarrow d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\rightarrow \int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$\rightarrow uv = \int u\,dv + \int v\,du \rightarrow \boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

فرمول اخیر را انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء می‌نامند. استفاده از این روش زمانی موفقیت‌آمیز خواهد بود که u و dv مناسب اختیار شود. این کار ابتدا با آزمایش و خطا و سپس تجربه حاصل می‌شود.

مثال ۱: انتگرال‌های زیر به روش جزء به جزء حل شده‌اند.

۱) $\int x \sin x\,dx$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin x\,dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + c$$

۲) $\int x\,Ln\,x\,dx$

$$\begin{cases} u = Ln\,x \rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\int x\,Ln\,x\,dx = \frac{1}{2}x^2\,Ln\,x - \int \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2\,Ln\,x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\,Ln\,x - \frac{1}{4}x^2 + c = \frac{1}{4}x^2\,(2Ln\,x - 1) + c$$

۳) $\int xe^x\,dx$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\int xe^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

۴) $\int x^2e^x\,dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$$

برای محاسبه $\int xe^x\,dx$ باید یک بار دیگر از روش جزء‌به‌جزء استفاده کنیم، این انتگرال را در صفحه قبل حل کردیم، پس داریم:

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

۵) $\int tan^{-1} x\,dx$

$$\begin{cases} u = tan^{-1} x \rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int tan^{-1} x\,dx = x\,tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

برای محاسبه $\int \frac{x}{1+x^2}dx$ از تغییر متغیر $u = 1 + x^2$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\int tan^{-1} x\;dx = x\,tan^{-1} x - \frac{1}{2}Ln|1 + x^2| + c$$

۶) $\int e^x \sin x\,dx$

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x\,dx \\ dv = \sin x\,dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$I = \int e^x \sin x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx \quad (*)$$

برای محاسبه $\int e^x\cos x\,dx$ بار دیگر از روش جزء‌به‌جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x\,dx \\ dv = \cos x\,dx \rightarrow v = \sin x \end{cases}$$

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - I$$

با قرار دادن رابطه اخیر در * داریم:

$$I = -e^x\cos x + (e^x\sin x - I) \rightarrow 2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$$

۳- انتگرال‌گیری از توابع گویا به روش تجزیه کسرها

قبل از توضیح این روش به یادآوری بحث تجزیه کسرها[1] می‌پردازیم. هرگاه $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای باشند، هر عبارت به صورت $\frac{p(x)}{q(x)}$ را یک کسر گویا می‌نامند. هر گاه درجه صورت یک کسر گویا از درجه مخرج آن بیشتر یا مساوی باشد می‌توان با تقسیم صورت بر مخرج، آن را به مجموع یک چندجمله‌ای و یک کسر گویا که درجه صورت آن از درجه مخرج کمتر است تبدیل کرد و با تجزیه مخرج کسر جدید، می‌توان این کسر گویا را به صورت مجموع یا تفاضل چند کسر گویای دیگر نوشت. این عمل را تجزیه کسرها می‌گویند. در حالت‌های زیر که با ذکر مثال‌هایی همراه است با نحوه تجزیه این نوع کسرها وقتی عوامل مخرج درجه یک یا دو باشند، آشنا می‌شوید.

حالت اول: عوامل مخرج درجه یک و غیر تکراری

$$\frac{1}{x(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}\quad,\quad \frac{x^2-5x+1}{x(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

حالت دوم: عوامل مخرج درجه یک و بعضی تکراری

$$\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}\quad,\quad \frac{2x^2-3x}{(x+1)^3(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x+3}$$

حالت سوم: عوامل مخرج درجه یک یا دو و عوامل درجه دو غیر تکراری

$$\frac{2}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\quad,\quad \frac{3x^2-7x}{(x^2+1)(x^2+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$$

حالت چهارم: عوامل مخرج درجه یک یا دو و بعضی از عوامل درجه دو تکراری

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{7x^3+3x+1}{(x^2+1)^2(x^2+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+3}$$

۱- برای کسب مهارت بیشتر برای تجزیه کسرها می‌توانید بخش ۳-۵ از کتاب ریاضیات مقدماتی را مطالعه کنید. در این بخش مثال‌های بیشتر و تمرین‌های متعددی برای تجزیه کسرها آمده است.

لذا در هر یک از حالت‌های فوق با مخرج مشترک‌گیری و مساوی قرار دادن صورت‌های دو کسر، به یک اتحاد بر حسب x می‌رسیم. با مساوی قرار دادن ضرایب جمله‌های متشابه دو طرف این اتحاد، یک دستگاه با چند معادله و چند مجهول مانند A، B، C و ⋯ پدید می‌آید. پس از حل این دستگاه، تجزیه کسر مورد نظر را می‌توان نوشت.

مثال ۲: کسر $p=\frac{2x+2}{(x^2+1)(x-1)}$ را تجزیه کنید.

حل: این کسر مشابه حالت سوم می‌باشد، لذا آن را به صورت زیر می‌توان تجزیه کرد:

$$p=\frac{2x+2}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

با مخرج مشترک‌گیری و مساوی قرار دادن صورت کسرها داریم:

$$A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)=2x+2$$

$$(A+B)x^2+(C-B)x+(A-C)=2x+2$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ C-B=2\\ A-C=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=2\\ B=-2\\ C=0\end{cases}\rightarrow P=\frac{2}{x-1}-\frac{2x}{x^2+1}$$

نکته: برای یافتن مقادیر A، B، C و ⋯ غیر از حل دستگاه، روش‌های دیگری نیز وجود دارد. یکی از آنها را همراه با حل دوباره قسمتی از مثال ۲ توضیح می‌دهیم. در مثال قبل معادله مقابل یک اتحاد است: $A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)=2x+2$

بنابراین به ازای کلیه مقادیر x، تساوی برقراری است. لذا با انتخاب مقادیری خاص برای x می‌توان معادله را ساده و مقادیر A، B و C را به‌دست آورد.

۱) $x=1\rightarrow 2A=4\rightarrow A=2$

۲) $(x=0\,,A=2)\rightarrow 2-C=2\rightarrow C=0$

۳) $(x=2\,,A=2\,,C=0)\rightarrow 10+2B=6\rightarrow B=-2$

تذکر: برای انتگرال گیری از یک تابع گویا، ابتدا عبارت گویا را تجزیه کرده، سپس انتگرال را به صورت مجموع یا تفاضل چند انتگرال ساده‌تر می‌نویسیم. مثال‌های بعد این روش را توضیح می‌دهند.

مثال ۳: انتگرال‌های توابع گویای زیر به روش تجزیه کسرها حل شده‌اند.

۱) $\int \frac{2x-1}{x+1}dx$

با تقسیم صورت بر مخرج و نوشتن رابطه تقسیم داریم:

$$\frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$$

$$\int \frac{2x-1}{x+1}dx = \int 2\,dx - 3\int \frac{1}{x+1}dx = 2x - 3\,Ln|x+1| + C$$

۲) $\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx$

$$\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \rightarrow (A = 2\,, B = 3)$$

$$\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx = 2\int \frac{1}{x-1}dx + 3\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= 2\,Ln|x-1| + 3\,Ln|x+1| + C$$

۳) $\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)}dx$

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \rightarrow (A = 2\,, B = -2\,, C = 0)$$

$$\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)}dx = 2\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= 2\,Ln|x-1| - Ln|x^2+1| + C$$

۴) $\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$

$$\frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\rightarrow (A = -2\,, B = 1\,, C = 2\,, D = 1)$$

$$\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}dx = -2\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx$$

$$= -2\,Ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= -2\,Ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + Ln|x^2+1| + tan^{-1}x + C$$

تمرین

۱- انتگرال‌های زیر را به روش جزءبه‌جزء حل کنید.

۱) $\int x \sin 2x\, dx$ ۲) $\int x \cos x\, dx$

۳) $\int Ln\,x\, dx$ ۴) $\int x\, Ln(3x)\, dx$

۵) $\int x e^{3x}\, dx$ ۶) $\int 2x e^{-x}\, dx$

۷) $\int x^2 \sin x\, dx$ ۸) $\int x^2 e^{2x}\, dx$

۹) $\int cot^{-1}x\, dx$ ۱۰) $\int sin^{-1}x\, dx$

۱۱) $\int \frac{tan^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ ۱۲) $\int \cos x\; Ln(\sin x)\, dx$

۱۳) $\int (Ln\,x)^2\, dx$ ۱۴) $\int x\, tan^{-1}x\, dx$

۲- انتگرال‌های زیر را به روش تجزیه کسرها حل کنید.

۱) $\int \frac{5x-3}{x+2}dx$ ۲) $\int \frac{x^2+3x}{x-1}dx$

۳) $\int \frac{x^3+4x+1}{x^2+4}dx$ ۴) $\int \frac{x^4+12x^2-26}{x^2+9}dx$

۵) $\int \frac{4}{x^2-4x}dx$ ۶) $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$

۷) $\int \frac{2x^2+4x-8}{x^3-4x}dx$ ۸) $\int \frac{6x^2-10x+2}{x(x-1)(x-2)}dx$

۹) $\int \frac{3x^2-1}{x^3+x^2}dx$ ۱۰) $\int \frac{1}{x(x^2-2x+1)}dx$

۱۱) $\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}dx$ ۱۲) $\int \frac{2x^3-x+2}{x^3+x}dx$

۴- انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر مثلثاتی

اگر تابعی که می‌خواهیم از آن انتگرال بگیریم شامل عبارت‌هایی به شکل $\sqrt{a^2-x^2}$، $\sqrt{a^2+x^2}$ و یا $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد $(a>0)$، گاهی با تغییر متغیر x به یک تابع مثلثاتی می‌توان انتگرال را حل کرد. هر حالت را جداگانه توضیح می‌دهیم.

حالت اول: اگر تابع شامل عبارتی به شکل $\sqrt{a^2-x^2}$ باشد از تغییر متغیر $x=a\sin t$ که $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ استفاده می‌کنیم، در این حالت داریم:

$$dx=a\cos t\,dt$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}$$
$$=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t$$

حالت دوم: اگر تابع شامل عبارتی به شکل $\sqrt{a^2+x^2}$ باشد از تغییر متغیر $x=a\tan t$ که $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ استفاده می‌کنیم، در این حالت داریم:

$$dx=a(1+\tan^2 t)\,dt$$

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}=\sqrt{a^2(1+\tan^2 t)}$$
$$=\sqrt{a^2\sec^2 t}=a\sec t$$

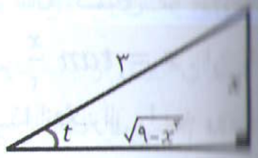
حالت سوم: اگر تابع شامل عبارتی به شکل $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد از تغییر متغیر $x=a\sec t$ که $0\le t<\frac{\pi}{2}$ یا $\pi\le t<\frac{3\pi}{2}$ استفاده می‌کنیم، در این حالت داریم:

$$dx=a\sec t\tan t\,dt$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}=\sqrt{a^2(\sec t^2-1)}$$
$$=\sqrt{a^2\tan^2 t}=a\tan t$$

مثال ۴: انتگرال‌های زیر به روش تغییر متغیر مثلثاتی حل شده‌اند.

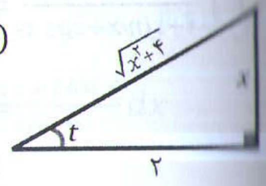
۱) $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$



$$\begin{cases}x=3\sin t\to dx=3\cos t\,dt\ ,\ t=\sin^{-1}(\frac{x}{3})\\ \sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\cos t\end{cases}$$

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\int(3\cos t)(3\cos t\,dt)=9\int\cos^2 t\,dt$$
$$=9\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{9}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+c$$
$$=\frac{9}{2}(t+\sin t\cos t)+c=\frac{9}{2}(\sin^{-1}(\frac{x}{3})+\frac{x}{3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{3})+c$$
$$=\frac{9}{2}\sin^{-1}(\frac{x}{3})+\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+c$$

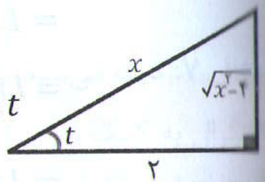
۲) $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$



$$\begin{cases}x=2\tan t\to dx=2\sec^2 t\,dt\ ,\ t=\tan^{-1}(\frac{x}{2})\\ \sqrt{x^2+4}=\sqrt{4\tan^2 t+4}=2\sec t\end{cases}$$

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx=\int\frac{2\sec^2 t\,dt}{4\tan^2 t\times 2\sec t}=\frac{1}{4}\int\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt=\frac{1}{4}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2}\quad(u=\sin t\to du=\cos t\,dt)$$
$$=-\frac{1}{4u}+c=-\frac{1}{4\sin t}+c=-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+c$$

۳) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$



$$\begin{cases}x=2\sec t\to dx=2\sec t\tan t\,dt\\ \sqrt{x^2-4}=\sqrt{4\sec^2 t-4}=\sqrt{4\tan^2 t}=2\tan t\end{cases}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{2\sec t\ \tan t\,dt}{2\tan t}=\int\sec t\,dt$$

دو روش برای حل $\int\sec t\,dt$ در صفحه‌های بعد آمده است. با توجه به شکل داریم: $\sec t=\frac{x}{2}$ و $\tan t=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$، با کمی محاسبات می‌توان نوشت:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int\sec t\,dt=Ln|\sec t+\tan t|+c=Ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+c_1$$

۵- انتگرال‌گیری از کسرهای گویای مثلثاتی (روش وایرشتراس)

وایرشتراس (۱۸۹۷-۱۸۱۵) ریاضی‌دان آلمانی کشف کرد که در هر تابع کسری که صورت و مخرج آن از $sin\,x$ و $cos\,x$ تشکیل شده باشد، تغییر متغیر $z = tan\,\frac{x}{۲}$، آن را از یک تابع گویای مثلثاتی به یک تابع گویا تبدیل می‌کند و لذا انتگرال را به روش ساده‌تری می‌توان حل کرد. با این تغییر متغیر، عبارات زیر را خواهیم داشت:

$$sin\,x = \frac{۲z}{۱+z^۲} \quad , \quad cos\,x = \frac{۱-z^۲}{۱+z^۲} \quad , \quad dx = \frac{۲\,dz}{۱+z^۲}$$

مثال ۵: انتگرال‌های زیر به روش تغییر متغیر وایرشتراس حل شده‌اند.

۱) $\int \frac{dx}{۱+cos\,x} = \int \frac{۱}{۱+\frac{۱-z^۲}{۱+z^۲}} \frac{۲\,dz}{۱+z^۲} = \int dz = z + c = tan(\frac{x}{۲}) + c$

۲) $\int \frac{dx}{۲+sin\,x+cos\,x} = \int \frac{۱}{۲+\frac{۲z}{۱+z^۲}+\frac{۱-z^۲}{۱+z^۲}} \frac{۲\,dz}{۱+z^۲} = \int \frac{۲\,dz}{z^۲+۲z+۳}$

$$= ۲\int \frac{dz}{(z+۱)^۲+(\sqrt{۲})^۲} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} tan^{-۱}(\frac{z+۱}{\sqrt{۲}}) + c$$

$$= \sqrt{۲}\, tan^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}(tan\frac{x}{۲}+۱)\right) + c$$

۳) $\int sec\,x\,dx = \int \frac{۱}{cos\,x}dx = \int \frac{۱+z^۲}{۱-z^۲}\frac{۲\,dz}{۱+z^۲}$

$$= \int \frac{۲dz}{۱-z^۲} = \int (\frac{۱}{۱+z}+\frac{۱}{۱-z})dz = \int \frac{dz}{۱+z} + \int \frac{dz}{۱-z}$$

$$= Ln|۱+z| - Ln|۱-z| + c$$

$$= Ln\left|۱+tan\frac{x}{۲}\right| - Ln\left|۱-tan\frac{x}{۲}\right| + c$$

$$= Ln\left|\frac{۱+tan\frac{x}{۲}}{۱-tan\frac{x}{۲}}\right| + c = Ln\left|tan(\frac{\pi}{۴}+\frac{x}{۲})\right| + c$$

نکته: به کمک روابط مثلثاتی می‌توان نشان داد که: $sec\,x + tan\,x = tan(\frac{\pi}{۴}+\frac{x}{۲})$

بنابراین داریم: $\int sec\,x\,dx = Ln\left|tan(\frac{\pi}{۴}+\frac{x}{۲})\right| + c = Ln|sec\,x + tan\,x| + c$

لذا اگر عمل انتگرال‌گیری نسبت به عمل مشتق گیری دشوارتر است. برای پیدا کردن مشتق یک تابع، واضح است که کدام فرمول مشتق‌گیری باید به کار برده شود؛ ولی در انتگرال‌گیری از یک تابع، ممکن است واضح نباشد کدام روش را باید به کار ببریم. ضمن اینکه بعضی از انتگرال‌ها با شگردهای خاصی قابل حل هستند و بعضی از انتگرال‌ها برحسب **توابع مقدماتی** (توابع فصل یکم) قابل حل نمی‌باشند. بنابراین باید توجه داشت که قاعده محکم و سریعی که به ما بگوید در محاسبه یک انتگرال چه قانون یا روشی را به کار گیریم وجود ندارد. تمرین و تکرار زیاد در حل مسئله‌های انتگرال‌گیری، تجربه‌ای را نصیب فرد می‌کند که بر اساس آن می‌تواند برای حل هر انتگرال، روش قابل قبولی را اتخاذ کند.

مثال ۶: محاسبه $\int sec\,x\,dx$ را در مثال قبل به روش وایرشتراس مشاهده کردید. این انتگرال با شگرد زیر نیز قابل حل است.

$$\int sec\,x\,dx = \int sec\,x\,\frac{sec\,x+tan\,x}{sec\,x+tan\,x}dx = \int \frac{sec^۲x+sec\,x\,tan\,x}{sec\,x+tan\,x}dx$$

$$u = sec\,x + tan\,x \rightarrow du = (sec\,x\,tan\,x + sec^۲ x)\,dx$$

$$\int sec\,x\,dx = \int \frac{du}{u} = Ln|u| + c = Ln|sec\,x + tan\,x| + c$$

به طور مشابه $\int csc\,x\,dx$ را می‌توان حل کرد و پاسخ آن به صورت زیر است:

$$\int csc\,x\,dx = Ln|csc\,x - cot\,x| + c$$

مثال ۷: ثابت می‌شود که $\int e^{x^۲}dx$ به کمک توابع مقدماتی قابل حل نمی‌باشد. این انتگرال به کمک سری تیلور تابع $e^{x^۲}$ در نقطه $x = ۰$ (سری ماکلورن $e^{x^۲}$) قابل حل است. بنابر مطالب بخش ۴-۶ داریم:

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots \rightarrow e^{x^۲} = ۱ + x^۲ + \frac{x^۴}{۲!} + \frac{x^۶}{۳!} + \cdots$$

$$\int e^{x^۲}dx = \int (۱ + x^۲ + \frac{x^۴}{۲!} + \frac{x^۶}{۳!} + \cdots)\,dx = x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵\times۲!} + \frac{x^۷}{۷\times۳!} + \cdots$$

تمرین

۱- انتگرال‌های زیر را به روش تغییر متغیر مثلثاتی حل کنید.

۱) $\int \sqrt{۴ - x^۲}\, dx$ ۲) $\int x^۲\sqrt{۴ - x^۲}\, dx$

۳) $\int \frac{۱}{x^۲\sqrt{x^۲+۱}} dx$ ۴) $\int \frac{۱}{x\sqrt{x^۲+۹}} dx$

۵) $\int \frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}} dx$ ۶) $\int \frac{۱}{x^۳\sqrt{x^۲-۹}} dx$

۲- انتگرال‌های زیر را به روش تغییر متغیر وایرشتراس $(z = tan\frac{x}{۲})$ حل کنید.

۱) $\int \frac{۱}{۳\sin x-۴\cos x} dx$ ۲) $\int \frac{۱}{۱-\sin x+\cos x} dx$

۳) $\int \csc x\, dx$ ۴) $\int \frac{۱}{۱+\sin x} dx$

۵) $\int \frac{\sin x}{۱+\cos x} dx$ ۶) $\int \frac{\cos x}{۱+\cos x} dx$

۷) $\int \frac{۱}{\sin x+\tan x} dx$ ۸) $\int \frac{\sec x}{۱+\sin x} dx$

۳- انتگرال‌های زیر به روش‌های عادی قابل حل نمی‌باشد، به کمک سری‌ها، آنها را حل کنید.

۱) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ۲) $\int \frac{۱-\cos x}{x} dx$

۳) $\int \cos x^۲\, dx$ ۴) $\int \sin x^۲\, dx$

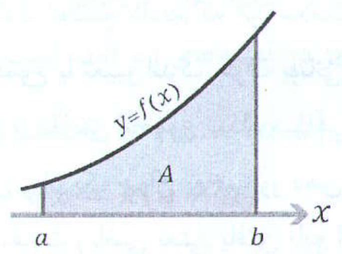
۵) $\int e^{-x^۲} dx$ ۶) $\int e^{x^۳} dx$

فصل ششم

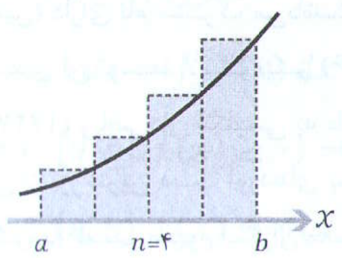
کاربرد انتگرال

۶-۱ انتگرال معین و قضیه‌های اساسی حساب

مقدمه: به دنبال پیدا کردن مساحت ناحیه‌ای با اضلاع خمیده هستیم و این کار آسانی نمی‌باشد. به خاطر آورید در فصل کاربرد مشتق، برای محاسبه شیب خط مماس بر منحنی، ابتدا شیب خط را توسط شیب خط‌های قاطع تقریب می‌زدیم، سپس حد این تقریب را محاسبه می‌کردیم، عدد حاصل شیب خط مماس بر منحنی بود. برای مساحت نیز روش مشابهی را دنبال می‌کنیم.



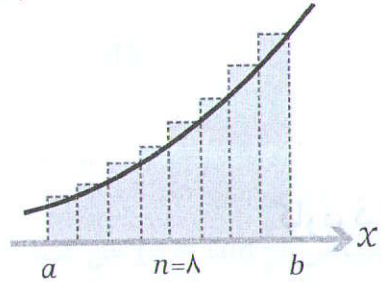
فرض کنید تابع f بر فاصله $[a, b]$ نامنفی باشد. می‌خواهیم مساحت محدود به منحنی تابع $y = f(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ و $y = ۰$ را محاسبه کنیم.

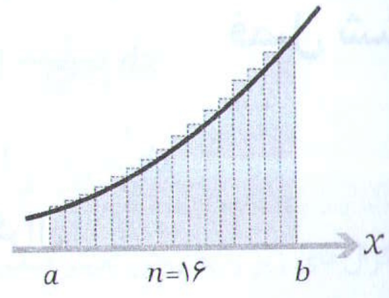


برای این منظور فاصله $[a, b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کرده و با محاسبه مجموع مساحت مستطیل‌هایی که در شکل مقابل مشاهده می‌کنید می‌توان یک مقدار تقریبی برای مساحت ناحیه A پیدا کرد.

هر چقدر n را بیشتر اختیار کنیم، تقریب بهتری برای مساحت ناحیه A خواهیم داشت. با فرض $x_0 = a$ ، $x_n = b$ و $x_i = a + i(\frac{b-a}{n})$ که $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ مجموع مساحت این مستطیل‌ها به صورت مقابل است.

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(\frac{b-a}{n})$$





در حالتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند حالت حدی مجموع مساحت مستطیل‌ها، دقیقاً با مساحت ناحیه A برابر می‌شود. مقدار این حد را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

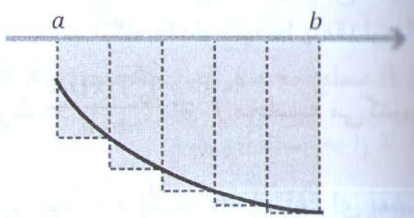
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)\, dx$$

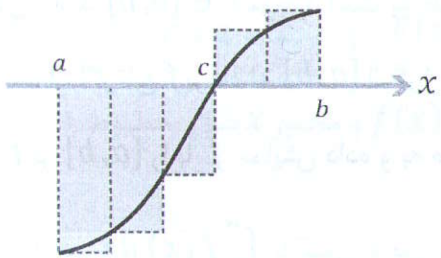
این نمایش جدید برای حد فوق را **انتگرال معین** تابع f بر فاصله $[a, b]$ می‌گویند. هم‌چنین a و b را به ترتیب کران‌های پایین و بالای انتگرال می‌نامند.

با توجه به محاسبات فوق، اکنون ارتباط علامت $\int$ با کلمه «مجموع» مشخص می‌شود. در فصل گذشته توضیح دادیم که این علامت از کشیده شدن حرف S ابتدای کلمه Sum به معنی مجموع یا تغییر اندک حرف یونانی ς (سیگما) گرفته شده است. در ریاضی از حرف سیگما برای نمایش مجموع تعداد متناهی یا نامتناهی جملات استفاده می‌شود.

به احتمال زیاد یک سوال تعجب‌آور ذهن شما را به خود مشغول داشته و آن اینکه چرا دو موضوع متفاوت ریاضی یعنی یافتن تابع اولیه (انتگرال نامعین) و حد مجموع مساحت‌ها (انتگرال معین) دارای نام مشترک می‌باشند؟ ارتباط این دو بسیار شگفت‌انگیز است و کشف و فرمول‌بندی آن توسط لایب نیتز (۱۶۴۶-۱۷۱۶) ریاضی‌دان آلمانی و ایزاک نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷) ریاضی‌دان انگلیسی به طور هم زمان ولی مستقل از یکدیگر انجام شده و آن را یکی از بزرگترین دست آوردهای بشر محسوب می‌کنند. قبل از بیان این ارتباط شگفت‌انگیز، به تعمیم مفهوم انتگرال معین و چند خاصیت مهم آن می‌پردازیم.

تعمیم مفهوم انتگرال معین : اگر تابع f بر فاصله $[a, b]$ نامثبت یا به عبارت دیگر نمودار تابع زیر محور xها باشد، عدد مربوط به حد مجموع مساحت مستطیل‌ها را منفی در نظر می‌گیریم، و اگر قسمتی از منحنی بالای محور xها و قسمتی دیگر زیر محور باشد حد مجموع مساحت مستطیل‌های هر قسمت را جداگانه حساب و با هم جمع می‌کنیم، عدد حاصل ممکن است صفر، مثبت و یا منفی به دست آید. در این حالت دیگر تعبیر انتگرال معین، مساحت نمی‌باشد.





هرگاه حد مجموع مساحت‌ها موجود باشد گوییم تابع f بر فاصله $[a, b]$ **انتگرال‌پذیر** است، یا به عبارت دیگر $\int_a^b f(x)\, dx$ موجود است. حال این سوال پیش می‌آید که کدام توابع انتگرال‌پذیرند؟ قسمتی از جواب این سوال توسط قضیه زیر داده شده است.

قضیه ۱: اگر تابع f بر فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه بر این فاصله انتگرال‌پذیر خواهد بود.

تذکر: ما در این بخش فقط با توابع پیوسته کار خواهیم کرد و انتگرال معین از بعضی توابع ناپیوسته را در بخش سوم این فصل تحت عنوان انتگرال‌های غیرعادی مورد بررسی قرار خواهیم داد. بعضی از خواص توابع انتگرال‌پذیر در قضیه‌های زیر آمده است.

قضیه ۲: هرگاه f و g توابع انتگرال‌پذیر بر فاصله $[a, b]$ باشند و $k \in \mathbb{R}$ داریم:

۱) $\int_a^b k\, dx = k(b-a)$ ۲) $\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx$

۳) $\int_a^b f(x) \pm g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$

۴) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \quad (a < c < b)$

۵) $(\forall x \in [a, b]: f(x) \geq 0) \rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$

۶) $(\forall x \in [a, b]: f(x) \leq g(x)) \rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

قضیه ۳: اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، دارای ماکزیمم و می‌نیمم مطلق مانند M و m است و داریم:

$$(\forall x \in [a,b]: m \leq f(x) \leq M) \rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

قضیه ۴ (قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها): اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد عددی مانند $c \in [a,b]$ موجود است به طوری که: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

تعریف ۱: اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه **مقدار متوسط** یا **مقدار میانگین** تابع f بر $[a,b]$ را با $\bar{f}$ نمایش داده و به صورت $\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ محاسبه می‌کنیم.

تذکر ۱: در $\int_a^b f(x)\,dx$ تا کنون فرض بر این بود که $a < b$، اما برای بعضی از اهداف مفید است که انتگرال معین را برای حالتی که $a = b$ یا $a > b$ باشد به صورت زیر تعمیم دهیم:

$$\int_a^a f(x)\,dx = ۰ \quad , \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad (a \neq b)$$

تذکر ۲: محاسبه انتگرال معین به کمک حد نیازمند مقدمات، اطلاعات و فرصت بیشتری است، ضمن اینکه کار ساده‌ای نیز نمی‌باشد. ما در این کتاب وارد بحث محاسبه انتگرال معین به وسیله حد نمی‌شویم. قضیه‌های زیر ضمن بیان ارتباط حد مجموع مساحت‌ها با تابع اولیه، محاسبه این حد را بسیار ساده می‌کند. سودمندی این قضیه‌ها به اندازه‌ای است که اغلب آنها را قضیه‌های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نامیده‌اند.

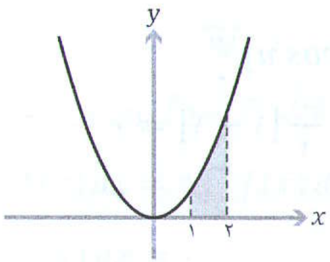
قضیه ۵ (اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال): اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه تابع $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ که $a \leq x \leq b$، بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و بر فاصله (a,b) مشتق‌پذیر است و $F'(x) = f(x)$

تذکر ۳: توضیح بیشتر و مثال برای اولین قضیه اساسی حساب در پایان این بخش آمده است.

قضیه ۶ (دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال): اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و F یک تابع اولیه برای f باشد، آنگاه: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

نکته ۱: قضیه اول وجود تابع F را در قضیه دوم تضمین می‌کند و قضیه دوم بیان می‌کند که می‌توان $\int_a^b f(x)\,dx$ را به سادگی با کم کردن مقادیر $F(x)$ در نقاط ابتدا و انتهای فاصله $[a,b]$ به‌دست آورد. خیلی حیرت‌آور است که $\int_a^b f(x)\,dx$ را که به روشی پیچیده و با استفاده از کلیه مقادیر $f(x)$ به ازای $a \leq x \leq b$ باید محاسبه می‌کردیم اکنون با داشتن مقادیر $F(x)$ تنها در نقاط a و b پیدا می‌کنیم.

مثال ۱: سطح محصور بین منحنی $f(x) = x^۲$ و محور xها و خطوط $x = ۱$ و $x = ۲$ را به‌دست آورید.



حل: برای این منظور باید $\int_۱^۲ x^۲\,dx$ را محاسبه کنیم.

$$F(x) = \int x^۲\,dx = \tfrac{۱}{۳}x^۳ + c$$

$$S = \int_۱^۲ x^۲\,dx = F(۲) - F(۱)$$

$$= (\tfrac{۸}{۳} + c) - (\tfrac{۱}{۳} + c) = \tfrac{۷}{۳}$$

نکته ۲: همان‌طور که در مثال فوق مشاهده می‌کنید در محاسبه انتگرال معین، مقدار ثابت c حذف می‌شود. لذا در انتگرال‌های معین، مقدار ثابت c را نمی‌نویسیم. برای اختصار محاسبه انتگرال معین را به یکی از صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال ۲: انتگرال‌های معین زیر به کمک قضیه دوم حساب دیفرانسیل حل شده‌اند.

۱) $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \sin\frac{\pi}{۲} - \sin ۰ = ۱ - ۰ = ۱$

۲) $\int_۰^۱ \frac{۱}{۱+x^۲}\,dx = \tan^{-۱} x\Big|_۰^۱ = \tan^{-۱} ۱ - \tan^{-۱} ۰ = \frac{\pi}{۴} - ۰ = \frac{\pi}{۴}$

۳) $\int_{Ln ۶}^{Ln ۸} ۵e^u\,du = ۵e^u\Big|_{Ln ۶}^{Ln ۸} = ۵(e^{Ln ۸} - e^{Ln ۶}) = ۵(۸ - ۶) = ۱۰$

نکته ۳: هنگامی که در محاسبه انتگرال معین از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم باید کران‌های انتگرال را نیز تغییر دهیم. در چنین حالتی انتگرال معین را با همان متغیر جدید محاسبه کرده و نیازی به برگشت و کار با متغیر اولیه نمی‌باشد.

مثال ۳: انتگرال‌های معین زیر به کمک قضیه دوم حساب دیفرانسیل و به کمک روش تغییر متغیر حل شده‌اند.

۱) $\int_1^2 (2x-1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{8}[3^4-1^4] = 10$

$u = 2x-1 \to du = 2\,dx \to dx = \frac{1}{2}du$

$\begin{cases} x=1 \to u=1 \\ x=2 \to u=3 \end{cases}$

۲) $\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin u\,du = \frac{1}{2}[-\cos u]_0^{2\pi}$

$= \frac{-1}{2}[\cos 2\pi - \cos 0] = \frac{-1}{2}[1-1] = 0$

$u = 2x \to du = 2\,dx \to dx = \frac{1}{2}du$

$\begin{cases} x=0 \to u=0 \\ x=\pi \to u=2\pi \end{cases}$

نکته ۴: برای محاسبه انتگرال معین یک تابع پیوسته چند ضابطه‌ای، انتگرال معین را به صورت مجموع چند انتگرال معین می‌نویسیم. لازم به تذکر است بررسی انتگرال از توابع چند ضابطه‌ای غیر پیوسته مانند $\int_0^3 [x]\,dx$ در بخش سوم همین فصل انجام می‌شود.

مثال ۴: در انتگرال‌های معین زیر، تابع زیر انتگرال چند ضابطه‌ای و پیوسته می‌باشد.

$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$

۱) $\int_{-1}^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^2 |x|\,dx = \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^2 x\,dx$

$= \left[\frac{-1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

۲) $\int_{-1}^2 g(x)\,dx = \int_{-1}^1 (x^2+1)dx + \int_1^2 2x\,dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^1 + [x^2]_1^2 = \frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3}$

نکته ۵: در محاسبه انتگرال معین به روش جزءبه‌جزء یا تجزیه کسرها، ابتدا تابع اولیه را به کمک انتگرال نامعین به دست آورده سپس انتگرال معین را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۵: انتگرال‌های معین زیر به کمک روش جزءبه‌جزء و تجزیه کسرها محاسبه شده است.

۱) $\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x - e^x]_0^1 = (e-e) - (0-1) = 1$

(انتگرال فوق به روش جزء به جزء حل شده است: $u = x\ ,\ dv = e^x\,dx\ ,\ \dots$)

۲) $\int_1^2 \frac{3}{x^2+3x}\,dx = \int_1^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3})dx = [Ln|x| - Ln|x+3|\,]_1^2$

$= (Ln\,2 - Ln\,5) - (Ln\,1 - Ln\,4) = Ln(\frac{8}{5})$

(انتگرال فوق به روش تجزیه کسرها حل شده است: $\frac{3}{x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}\ ,\ \dots$)

نکته ۶: فرض کنید تابع f بر فاصله $[-a,a]$ انتگرال‌پذیر است. اگر تابع f روی این فاصله:

الف) زوج باشد یعنی $f(-x) = f(x)$، آنگاه داریم: $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

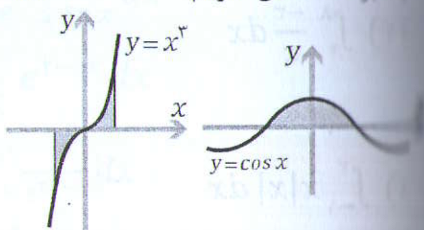
ب) فرد باشد یعنی $f(-x) = -f(x)$، آنگاه داریم: $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

مثال ۶: توابع $f(x) = \cos x$ و $g(x) = x^3$ بر $\mathbb{R}$ به ترتیب زوج و فرد می‌باشند، لذا بنا بر نکته قبل داریم:

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

$= 2\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(1-0) = 2$

$\int_{-2}^2 g(x)\,dx = \int_{-2}^2 x^3\,dx = 0$



مثال ۷: مقدار متوسط تابع $f(x) = 2x$ را بر فاصله $[1,5]$ بیابید. سپس نقطه $c \in [1,5]$ را پیدا کنید که $\bar{f} = f(c)$.

حل: با توجه به تعریف مقدار متوسط تابع ($\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$) داریم:

$\bar{f} = \frac{\int_1^5 2x\,dx}{5-1} = \frac{1}{4}x^2\Big|_1^5 = \frac{1}{4}(25-1) = 6\ ,\ \bar{f} = f(c) \to 6 = 2c \to c = 3$

تمرین

۱- حاصل انتگرال‌های معین زیر را بیابید.

۱) $\int_{-1}^{4} 5\, dx$

۲) $\int_{2}^{5} (2x-3)\, dx$

۳) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{t}\, dt$

۴) $\int_{1}^{4} t^{-2}\, dt$

۵) $\int_{1}^{0} (x-2)(2x+1)\, dx$

۶) $\int_{0/5}^{0} (4x^2-4x+1)\, dx$

۷) $\int_{1}^{2} (x+\frac{1}{x})^2\, dx$

۸) $\int_{-1}^{0} (x^3-1)^2\, dx$

۹) $\int_{1}^{4} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\, dx$

۱۰) $\int_{0}^{8} \sqrt[3]{x}\,(x-1)\, dx$

۱۱) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt$

۱۲) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t\, dt$

۱۳) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$

۱۴) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\, dx$

۱۵) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \csc x \cot x\, dx$

۱۶) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sec x \tan x\, dx$

۱۷) $\int_{0}^{0/5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

۱۸) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

۱۹) $\int_{0}^{Ln\,2} 3e^{u}\, du$

۲۰) $\int_{Ln\,3}^{Ln\,6} 2e^{x}\, dx$

۲۱) $\int_{0}^{2} 2^{x}\, dx$

۲۲) $\int_{-2}^{0} 5^{u}\, du$

۲۳) $\int_{4}^{8} \frac{-3}{x}\, dx$

۲۴) $\int_{e^{-1}}^{e} \frac{2}{x}\, dx$

۲- حاصل انتگرال‌های معین زیر را بیابید.

۱) $\int_{-1}^{2} x|x|\, dx$

۲) $\int_{0}^{3} |x-2|\, dx$

۳) $\int_{0}^{2} |x^2-1|\, dx$

۴) $\int_{-1}^{1} |x-x^2|\, dx$

۵) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \quad , \quad f(x)=\begin{cases} x & -\pi \le x \le 0 \\ \sin x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

۶) $\int_{0}^{e^2} g(x)\, dx \quad , \quad g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & 1 \le x \\ 2x-1 & x \le 1 \end{cases}$

۴- حاصل انتگرال‌های معین زیر را بیابید.

۱) $\int_{0}^{1} (2x-1)^5\, dx$

۲) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(2t+3)^2}\, dt$

۳) $\int_{1}^{5} \sqrt{2t-1}\, dt$

۴) $\int_{-2}^{6} \sqrt[3]{x+2}\, dx$

۵) $\int_{1}^{\sqrt{7}} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\, dx$

۶) $\int_{0}^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\, dx$

۷) $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x+2}\, dx$

۸) $\int_{0}^{15} \frac{x}{\sqrt[4]{(1+x)^3}}\, dx$

۹) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\, dx$

۱۰) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$

۱۱) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3x\, dx$

۱۲) $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x\, dx$

۱۳) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$

۱۴) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\, dx$

۱۵) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+1}\, dx$

۱۶) $\int_{-\frac{1}{4}}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$

۱۷) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{3-2x}\, dx$

۱۸) $\int_{1}^{3} \frac{2}{t+1}\, dt$

۱۹) $\int_{0}^{Ln\,3} \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$

۲۰) $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\,Ln\,x}\, dx$

۲۱) $\int_{1}^{2} x^2 e^{x^3-1}\, dx$

۲۲) $\int_{\frac{1}{5}}^{1} e^{2-5x}\, dx$

۲۳) $\int_{-1}^{2} t\, 2^{t^2}\, dt$

۲۴) $\int_{0}^{1} \frac{2}{5^{2x-1}}\, dx$

۲۵) $\int_{1}^{e} x\, Ln\, x\, dx$

۲۶) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$

۲۷) $\int_{1}^{3} \frac{1}{x(x+2)}\, dx$

۲۸) $\int_{2}^{4} \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\, dx$

انتگرال‌گیری تقریبی

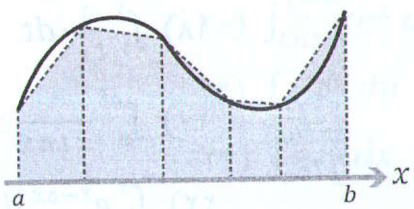
تعیین مقدار دقیق یک انتگرال معین در دو حالت زیر امکان‌پذیر نیست:

حالت اول: برای محاسبه $\int_a^b f(x)\,dx$ ، یافتن تابع اولیه $F(x)$ مشکل یا غیر ممکن است. انتگرال‌های $\int_{-۱}^{۱} \sqrt{۱+x^۳}\,dx$ و $\int_۰^۱ e^{x^۲}\,dx$ نمونه‌هایی از این حالت هستند.

حالت دوم: ضابطه تابع مربوط به نتایج یک آزمایش علمی در اختیار نمی‌باشد. نمونه‌هایی برای این حالت را در مثال‌های ۹ و ۱۰ می‌توانید مشاهده کنید.

در چنین حالت‌هایی برای محاسبه مقدار انتگرال معین، از روش‌های تقریبی استفاده می‌کنیم. در ابتدای این بخش با یکی از روش‌های تقریب انتگرال معین (روش مستطیلی) آشنا شدید. در این روش انتگرال معین را با مجموع مساحت مستطیل‌ها تقریب می‌زدیم. اکنون به معرفی چند روش دیگر می‌پردازیم.

۱- تقریب انتگرال معین به روش ذوزنقه‌ای: در این روش انتگرال معین را با مجموع مساحت ذوزنقه‌هایی با ارتفاع‌های مساوی تقریب می‌زنیم. این روش نسبت به روش تقریب انتگرال به کمک مجموع مساحت مستطیل‌ها، تقریب بهتری برای انتگرال معین می‌باشد.



فرض کنید تابع f بر فاصله $[a,b]$ تعریف شده باشد. این فاصله را به n قسمت مساوی به طول $h=\frac{b-a}{n}$ تقسیم می‌کنیم، داریم: $x_i = a + ih$ که $i = ۰,۱,۲,\cdots,n$

هم‌چنین داریم: $x_۰ = a$ و $x_n = b$. با توجه به اینکه مساحت ذوزنقه برابر نصف حاصل ضرب مجموع دو قاعده در ارتفاع می‌باشد و قاعده این ذوزنقه‌ها $f(x_i)$ و ارتفاع همه ذوزنقه‌ها برابر $h=\frac{b-a}{n}$ است؛ لذا مجموع مساحت ذوزنقه‌ها به صورت زیر می‌باشد.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{۲}[f(x_۰) + ۲f(x_۱) + ۲f(x_۲) + \cdots + ۲f(x_{n-۱}) + f(x_n)]}$$

بدیهی است هر چقدر تعداد ذوزنقه‌ها را بیشتر اختیار کنیم یا به عبارت دیگر هر چقدر n را بزرگ‌تر اختیار کنیم، تقریب بهتری برای مساحت زیر منحنی و یا همان انتگرال معین خواهیم داشت.

مثال ۸: به روش ذوزنقه‌ای مقدار تقریبی $\int_۰^۲ e^{x^۲}\,dx$ را برای $n=۴$ محاسبه کنید.

حل: با فرض $f(x) = e^{x^۲}$ داریم:

$$h = \frac{۲-۰}{۴} = \frac{۱}{۲} \to (x_۰ = ۰\ ,\ x_۱ = ۰/۵\ ,\ x_۲ = ۱\ ,\ x_۳ = ۱/۵\ ,\ x_۴ = ۲)$$

$$f(۰) = ۱\ ,\ f(۰/۵) = e^{۰/۲۵}\ ,\ f(۱) = e\ ,\ f(۱/۵) = e^{۲/۲۵}\ ,\ f(۲) = e^۴$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{۲}[f(x_۰) + ۲f(x_۱) + ۲f(x_۲) + ۲f(x_۳) + f(x_۴)]$$

$$= \frac{۱}{۴}[۱ + ۲e^{۰/۲۵} + ۲e + ۲e^{۲/۲۵} + e^۴]$$

$$= \frac{۱}{۴}[۱ + ۲/۵۶ + ۵/۴۲ + ۱۸/۹۶ + ۵۴/۵۸] = ۲۰/۶۳$$

مثال ۹: فرض کنید داده‌های زیر از یک آزمایش به‌دست آمده است:

x_i	۳	۳/۲۵	۳/۵	۳/۷۵	۴	۴/۲۵	۴/۵
y_i	۶/۷	۸/۴	۸/۲	۹/۲	۱۰/۴	۱۱/۶	۱۲/۵

هرگاه $\int_۳^{۴/۵} y\,dx$ مورد نیاز باشد چون ضابطه تابع $y=f(x)$ را در اختیار نداریم از روش‌های تقریبی برای محاسبه این انتگرال معین استفاده می‌کنیم. مقدار تقریبی این انتگرال به کمک روش ذوزنقه‌ای در زیر محاسبه شده است.

$$n = ۶\quad ,\quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{۴/۵-۳}{۶} = \frac{۱}{۴}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{۲}[f(x_۰) + ۲f(x_۱) + ۲f(x_۲) + \cdots + ۲f(x_۵) + f(x_۶)]$$

$$\int_۳^{۴/۵} y\,dx \cong \frac{۱}{۸}[۶/۷ + ۱۶/۸ + ۱۶/۴ + ۱۸/۴ + ۲۰/۸ + ۲۳/۲ + ۱۲/۵] = ۱۴/۳۱$$

مثال ۱۰: راننده یک خودرو با مشاهده مانعی ترمز می‌زند و خودرو پس از ۵ ثانیه متوقف می‌شود. سرعت خودرو در لحظات مختلف این ۵ ثانیه در جدول زیر آمده است:

t (زمان برحسب ثانیه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
v (سرعت برحسب متر بر ثانیه)	۷۰	۳۸	۲۱	۱۲	۵	۰

مسافتی که این خودرو در مدت این ۵ ثانیه پیموده است را محاسبه کنید.

حل: اگر معادله‌های حرکت و سرعت این خودرو را به ترتیب $s(t)$ و $v(t)$ بنامیم، داریم:

$$v(t) = s'(t) \quad , \quad s(t) = \int v(t)\,dt$$

بنابراین مسافت پیموده شده در فاصله زمانی $[۰,۵]$ برابر انتگرال معین زیر می‌باشد.

$$\int_{۰}^{۵} v(t)\,dt = s(۵) - s(۰)$$

چون ضابطه تابع $v(x)$ را در اختیار نداریم برای محاسبه مقدار تقریبی این انتگرال معین از روش ذوزنقه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$n = ۵ \quad , \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{۵-۰}{۵} = ۱$$

$$\int_a^b v(t)\,dt \cong \frac{h}{۲}[v(t_۰) + ۲v(t_۱) + ۲v(t_۲) + ۲v(t_۳) + ۲v(t_۴) + v(t_۵)]$$

$$\int_{۰}^{۵} v(t)\,dt \cong \frac{۱}{۲}[۷۰ + ۲(۳۸) + ۲(۲۱) + ۲(۱۲) + ۲(۵) + ۰] = ۱۱۱\,m$$

۲- تقریب انتگرال معین به کمک سری‌ها: هرگاه جواب انتگرال معین را نتوانیم با یک تابع مقدماتی بیان کنیم، به کمک سری‌ها، تابع زیر انتگرال را با یک تابع چندجمله‌ای از درجه n تقریب زده و سپس انتگرال معین را محاسبه می‌کنیم. واضح است هر چقدر n بزرگ‌تر اختیار شود عدد حاصل، تقریب بهتری برای انتگرال معین می‌باشد.

مثال ۱۱: به کمک سری‌ها مقدار تقریبی $\int_{۱}^{۲} \frac{\sin x}{x}\,dx$ را بیابید.

حل: سری ماکلورن تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ به صورت زیر است:

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots \rightarrow \frac{\sin x}{x} = ۱ - \frac{x^۲}{۳!} + \frac{x^۴}{۵!} - \frac{x^۶}{۷!} + \cdots$$

هرگاه تابع زیر انتگرال را با یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۴ تقریب بزنیم مقدار تقریبی انتگرال برابر است با:

$$\int_{۱}^{۲} \frac{\sin x}{x}\,dx \cong \int_{۱}^{۲} (۱ - \frac{x^۲}{۳!} + \frac{x^۴}{۵!})\,dx = \left[x - \frac{x^۳}{۳\times۳!} + \frac{x^۵}{۵\times۵!}\right]_{۱}^{۲} = ۰/۶۶۳$$

۳- محاسبه انتگرال معین به کمک ماشین‌حساب و نرم‌افزارهای ریاضی:

اکثر ماشین‌حساب‌های علمی جدید قادرند هر انتگرال معین را، با دقت بسیار بالا محاسبه کنند. در استفاده از هر ماشین‌حساب باید طبق دفترچه راهنمای آن عمل کنید. معمولاً برای محاسبه به عنوان مثال $\int_{۲}^{۵} \sqrt{۱ + x^۴}\,dx$ باید عبارتی به صورت زیر نوشته شود:

$$\int(\boxed{\sqrt{\ }}(۱ + x\ \boxed{x^y}\ ۴), ۲, ۵)$$

همچنین می‌توان انتگرال‌های معین و نامعین را به کمک نرم‌افزارهای مختلف ریاضی از جمله نرم‌افزار میپل محاسبه کرد.

تذکر: خبر فوق بلافاصله این سوال را در ذهن پدید می‌آورد که آیا با وجود ماشین‌های حساب و نرم‌افزارهای ریاضی دیگر نیازی به فراگیری روش‌های انتگرال‌گیری می‌باشد؟ مشابه این سوال در فصل کاربرد مشتق، هنگام محاسبه مقدار تقریبی بعضی از عبارت‌ها به کمک دیفرانسیل نیز مطرح شد. پاسخ این سوال مانند پاسخ قبلی است. برای رسیدن به اهداف ریاضی باید بعضی از مسیرها را پیاده طی نمود تا بسیاری از راه‌حل‌ها را لمس کرد. به دنبال انجام عملیات ریاضی و تفکر در هر مسئله‌ای، فرد مهارت‌ها و تجربه‌هایی کسب می‌کند که از آنها در حل مسائل جدید می‌تواند استفاده کند. لذا قبل از گذراندن این درس، تنها در مواردی که به شما اجازه داده شده می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.

آشنایی بیشتر با اولین قضیه اساسی حساب

صورت اولین قضیه اساسی حساب به صورت زیر بود:

«اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه تابع $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ که $a \le x \le b$، بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و بر فاصله (a,b) مشتق‌پذیر است و $F'(x)=f(x)$»

به کمک قضیه فوق توابع جدیدی را می‌توان تعریف کرد که به آنها توابع انتگرالی می‌گوییم. از جمله توابع انتگرالی می‌توان به تابع خطای $erf(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ که در نظریه‌های احتمال، جریان گرما و انتقال سیگنال به کار می‌رود و تابع سینوسی $si(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ که در مهندسی کاربرد دارد، اشاره کرد.

یکی دیگر از توابع انتگرالی که از اهمیت فراوانی برخوردار است تابع $g(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ برای $x>0$ می‌باشد. می‌توان نشان داد که این تابع تمام ویژگی‌های تابع لگاریتم طبیعی را دارد؛ بنابراین: $\boxed{Ln\,x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \;,\; x>0}$

با توجه به تعریف جدید لگاریتم طبیعی و اولین قضیه اساسی داریم: $\boxed{\frac{d(Ln\,x)}{dx}=\frac{1}{x}}$

مثال ۱۲: مشتق توابع زیر به کمک اولین قضیه اساسی حساب، محاسبه شده است. لازم به توضیح است توابع زیر انتگرال در فاصله‌های مورد نظر پیوسته می‌باشند.

۱) $g(x)=\int_a^x \sqrt{1+t^2}\,dt \to g'(x)=\sqrt{1+x^2}$

۲) $g(x)=\int_a^x \sin\sqrt{u}\,du \to g'(x)=\sin\sqrt{x}$

۳) $g(x)=\int_0^{x^2} \cos t\,dt=\int_0^u \cos t\,dt=h(u) \quad (u=x^2)$

$$g'(x)=u'h'(u)=2x\cos u=2x\cos x^2$$

۴) $g(x)=\int_{\cos x}^0 \frac{dt}{1+t^2}=-\int_0^{\cos x}\frac{dt}{1+t^2}=-\int_0^u \frac{dt}{1+t^2}=h(u) \quad (u=\cos x)$

$$g'(x)=-u'h'(u)=-(-\sin x)\frac{1}{1+u^2}=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$$

تمرین

۱- مقدار تقریبی انتگرال‌های معین را به روش ذوزنقه‌ای برای $n=4$ محاسبه کنید.

۱) $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$ ۲) $\int_0^2 \frac{1}{1+x^4}\,dx$

۳) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x}\,\cos x\,dx$ ۴) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$

۲- با در نظر گرفتن سه جمله اول بسط ماکلورن تابع زیر انتگرال (بسط تیلور تابع حول نقطه $x=0$)، مقدار تقریبی انتگرال‌های معین را بیابید.

۱) $\int_{-1}^1 \sin x^2\,dx$ ۲) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$

۳) $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$ ۴) $\int_0^1 e^{x^3}\,dx$

۳- مقدار انتگرال‌های معین زیر را به کمک ماشین‌حساب یا نرم‌افزارهای ریاضی بیابید.

۱) $\int_1^2 \frac{e^x}{x^2}\,dx$ ۲) $\int_{-1}^2 \sqrt{1+5x^2}\,dx$

۳) $\int_0^1 \sqrt[3]{8+x^2}\,dx$ ۴) $\int_{-1}^2 x^2\,\tan^{-1}x\,dx$

۴- مشتق توابع زیر را به کمک اولین قضیه اساسی حساب بیابید.

۱) $g(x)=\int_{-1}^x \sqrt{t^3+1}\,dt$ ۲) $f(t)=\int_0^t \sin(x^2)\,dx$

۳) $f(t)=\int_t^2 \frac{1}{x^4+1}\,dx$ ۴) $g(x)=\int_x^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}\,dt$

۵) $h(x)=\int_{-1}^{\sqrt{x}} \frac{s^2}{s^2+1}\,ds$ ۶) $h(x)=\int_2^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt$

۷) $f(x)=\int_2^{\frac{1}{x}} \sin^4 t\,dt$ ۸) $f(t)=\int_0^{\tan t} (u^2+1)\,du$

۶-۲ محاسبه سطح، حجم و طول

انتگرال معین در رشته‌های مختلف علوم مانند مهندسی، فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و اقتصاد کاربردهای فراوانی دارد که امکان طرح و بررسی همه آنها در این کتاب فراهم نیست، با آنها در دروس تخصصی رشته خود آشنا می‌شوید. چند مورد از مهمترین کاربردهای انتگرال معین، محاسبه سطح، حجم و طول می‌باشد که در این بخش به آنها خواهیم پرداخت. محاسبه این موارد تا قرن هفدهم میلادی همواره جزء مشکل‌ترین مسائل بوده و تنها یک نابغه می‌توانسته با آنها درگیر شود. اما از قرن هفدهم به بعد با تلاش دانشمندان ریاضی از جمله نیوتن و لایب نیتز روش‌های منظمی ارائه شد که به کمک آنها این نوع مسائل دشوار به راحتی قابل حل گردید. برای فهم و حل مثال‌ها و تمرین‌های این بخش، توانایی رسم توابع و تسلط بر روش‌های انتگرال‌گیری ضروری می‌باشد.

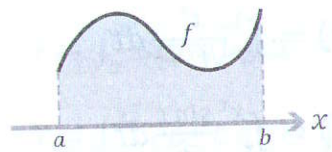
محاسبه سطح محصور:

در بخش قبل تا حدودی با اساسی‌ترین کاربرد انتگرال معین یعنی محاسبه یک سطح آشنا شدید. اکنون این مطلب را بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم. لازم به توضیح است مانند میزان تغییرات در فصل کاربرد مشتق، در هر رشته‌ای از علوم، از این مساحت تعبیر خاصی می‌شود.

۱) سطح محصور بین منحنی f و محور xها

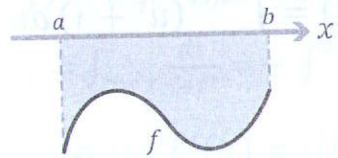
هرگاه تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، برای محاسبه سطح محصور بین منحنی f و خط‌های $x=a$ ، $x=b$ و محور xها یکی از حالت‌های زیر را داریم:

الف) اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ بالای محور xها باشد ($f(x) \geq 0$) ، در این حالت مساحت



برابر است با: $\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$

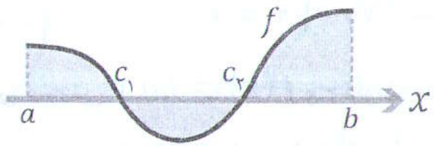
ب) اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ زیر محور xها باشد ($f(x) \leq 0$) ، در این حالت مساحت



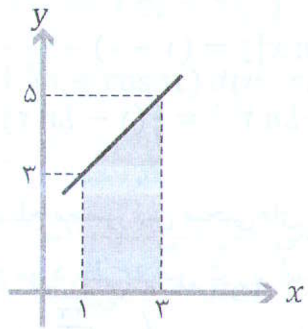
برابر است با: $\boxed{S = -\int_a^b f(x)\,dx}$

ج) اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ گاهی بالا و گاهی پایین محور xها باشد، برای محاسبه مساحت، ابتدا صفرهای تابع را پیدا کرده، سپس مساحت هر قسمت در بالا یا پایین محور xها را جداگانه حساب و با هم جمع می‌کنیم. به عنوان نمونه برای شکل زیر داریم:

$$S = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \left[-\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx\right] + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx$$



مثال ۱: سطح محصور بین منحنی $f(x) = x + 2$ و محور xها و خطوط $x = 1$ و $x = 4$ را بیابید.

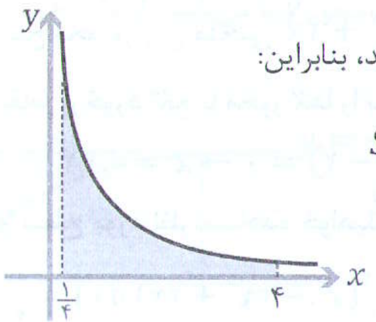


حل: سطح مورد نظر یک ذوزنقه با قاعده‌های ۳ و ۵ و ارتفاع ۲ می‌باشد. مساحت این ذوزنقه برابر است با: $S = \frac{2(3+5)}{2} = 8$

از فرمول محاسبه سطح به کمک انتگرال نیز همین نتیجه به‌دست می‌آید.

$$S = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x+2)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^3 = \frac{21}{2} - \frac{5}{2} = 8$$

مثال ۲: سطح محصور بین منحنی $f(x) = \frac{1}{x}$ و محور xها و خطوط $x = \frac{1}{4}$ و $x = 4$ را بیابید.



حل: سطح مورد نظر به صورت مقابل می‌باشد، بنابراین:

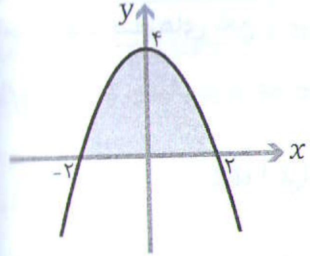
$$S = \int_{\frac{1}{4}}^{4} \frac{1}{x}\,dx = [Ln|x|]_{\frac{1}{4}}^{4}$$

$$= Ln 4 - Ln\frac{1}{4} = Ln 4 - Ln 4^{-1}$$

$$= Ln 4 - (-Ln 4) = 2 Ln 4$$

مثال ۳: سطح محصور بین منحنی $f(x) = ۴ - x^۲$ و محور xها را بیابید.

حل: تابع f در نقاط $x = \pm ۲$ محور xها را قطع می‌کند. سطح مورد نظر به صورت مقابل می‌باشد.

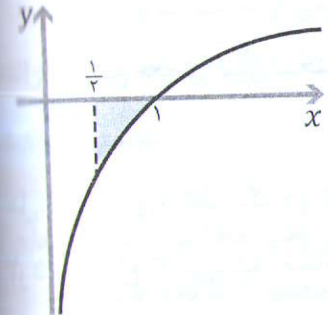


بنابراین داریم:

$$S = \int_{-۲}^{۲} (۴ - x^۲)\, dx$$
$$= ۲\int_{۰}^{۲} (۴ - x^۲)\, dx = ۲\left[۴x - \frac{x^۳}{۳}\right]_{۰}^{۲} = \frac{۳۲}{۳}$$

مثال ۴: سطح محصور بین منحنی $f(x) = Ln\, x$ و خطوط $y = ۰$ و $x = \frac{۱}{۲}$ را بیابید.

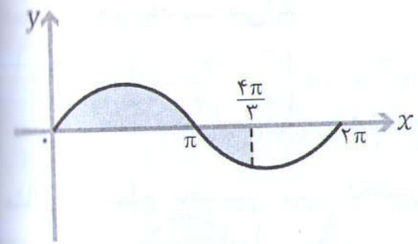
حل: سطح مورد نظر به صورت زیر است. بنابراین داریم:



$$S = -\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} Ln\, x\, dx = -[x\, Ln\, x - x]_{\frac{۱}{۲}}^{۱}$$
$$= [x - x\, Ln\, x]_{\frac{۱}{۲}}^{۱} = (۱ - ۰) - (\tfrac{۱}{۲} - \tfrac{۱}{۲} Ln \tfrac{۱}{۲})$$
$$= ۱ - \tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۱}{۲} Ln\, ۲^{-۱} = \tfrac{۱}{۲}(۱ - Ln\, ۲)$$

مثال ۵: سطح محصور بین منحنی‌های $y = \sin x$ ، $x = ۰$ ، $y = ۰$ و $x = \frac{۴\pi}{۳}$ را بیابید.

حل: سطح مورد نظر به صورت زیر است. بنابراین داریم:



$$S = \int_{۰}^{\pi} \sin x\, dx + \left(-\int_{\pi}^{\frac{۴\pi}{۳}} \sin x\, dx\right)$$
$$= [-\cos x]_{۰}^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{\frac{۴\pi}{۳}}$$
$$= (۱ + ۱) + (-\tfrac{۱}{۲} + ۱) = ۲ + \tfrac{۱}{۲} = \tfrac{۵}{۲}$$

مثال ۶: سطح محصور بین منحنی $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۲x$ و محور xها را بیابید.

حل: ابتدا نقاط برخورد تابع با محور xها را به‌دست می‌آوریم.

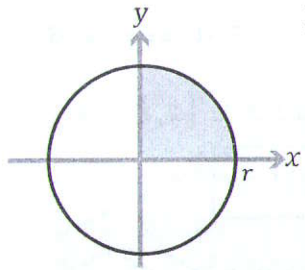
$$x^۳ - ۳x^۲ + ۲x = ۰ \to x(x-۱)(x-۲) = ۰ \to x = ۰, ۱, ۲$$

پس از رسم سطح مورد نظر، مشاهده خواهید کرد مساحت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \int_{۰}^{۱} (x^۳ - ۳x^۲ + ۲x)\, dx + \left(-\int_{۱}^{۲} (x^۳ - ۳x^۲ + ۲x)\, dx\right) = \tfrac{۱}{۴} + \tfrac{۱}{۴} = \tfrac{۱}{۲}$$

مثال ۷: به کمک انتگرال‌گیری مساحت یک دایره به شعاع r را بیابید.

حل: معادله این دایره را به صورت $x^۲ + y^۲ = r^۲$ در نظر می‌گیریم. مساحت ربع دایره، سطح محصور بین نیم‌دایره $y = \sqrt{r^۲ - x^۲}$ و خطوط $x = ۰$ و $y = ۰$ می‌باشد.



بنابراین داریم: $S = ۴\int_{۰}^{r} \sqrt{r^۲ - x^۲}\, dx$

انتگرال فوق به روش تغییر متغیر مثلثاتی $x = r \sin t$ حل می‌شود و داریم:

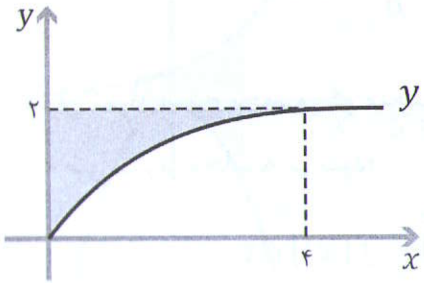
$$S = ۴\int_{۰}^{r} \sqrt{r^۲ - x^۲}\, dx = ۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{r^۲ - r^۲ \sin^۲ t}\,(r \cos t\, dt)$$
$$= ۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} r^۲ \cos^۲ t\, dt = ۴r^۲ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱ + \cos ۲t}{۲}\, dt$$
$$= ۲r^۲ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (۱ + \cos ۲t)\, dt = ۲r^۲ \left[t + \tfrac{۱}{۲} \sin ۲t\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \pi r^۲$$

نکته: برای محاسبه **مساحت بیضی** مشابه محاسبه مساحت دایره عمل می‌کنیم و به انتگرالی می‌رسیم که به روش تغییر متغیر مثلثاتی حل می‌شود. اگر اقطار بیضی را $۲a$ و $۲b$ بنامیم، فرمول مساحت بیضی به صورت $S = \pi ab$ می‌باشد.

تذکر: برای تعیین سطح محصور گاهی بهتر است x را به صورت تابعی از y بیان کرده و سپس مساحت را محاسبه کنیم.

مثال ۸: سطح محصور بین منحنی $y = \sqrt{x}$ و خطوط $x = ۰$ و $y = ۲$ را بیابید.

حل: چون سطح محصور بین یک منحنی و محور yها می‌باشد، ابتدا منحنی را به صورت تابعی از y می‌نویسیم:



$$y = \sqrt{x} \to x = y^۲ \to x = g(y) = y^۲$$
$$S = \int_{۰}^{۲} g(y)\, dy = \int_{۰}^{۲} y^۲\, dy$$
$$= \left[\tfrac{۱}{۳} y^۳\right]_{۰}^{۲} = \tfrac{۸}{۳}$$

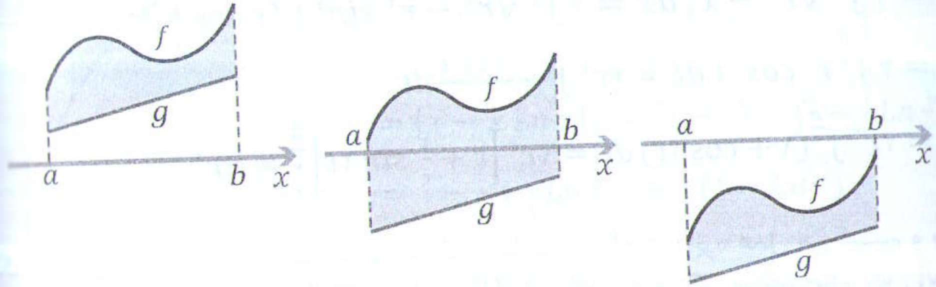
۲) سطح محصور بین دو منحنی f و g

هرگاه توابع f و g بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشند برای محاسبه سطح محصور بین دو منحنی f و g و خطوط $x = a$ و $x = b$ یکی از حالت‌های زیر را داریم:

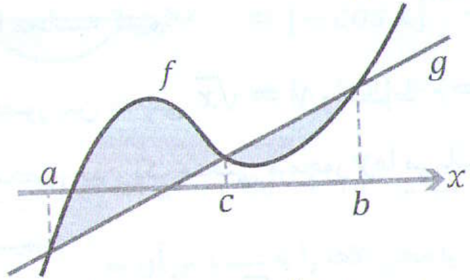
الف) اگر برای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم: $g(x) \leq f(x)$ ، در این حالت مساحت برابر است با:

$$\boxed{S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

لازم به تذکر است که شرط مثبت بودن f و g لازم نمی‌باشد. بعضی از شکل‌های این ناحیه به صورت‌های زیر می‌باشد:



ب) اگر دو تابع f و g در فاصله $[a,b]$ در نقاطی هم‌دیگر را قطع کنند برای محاسبه سطح محصور ابتدا نقاط تقاطع دو منحنی را پیدا کرده، سپس مساحت هر قسمت را جداگانه حساب و با هم جمع می‌کنیم.

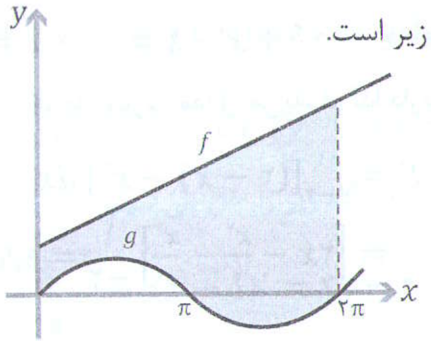


به عنوان نمونه سطح محصور دو منحنی f و g و خطوط $x = a$ و $x = b$ شکل فوق به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \int_a^c [f(x) - g(x)]\, dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

مثال ۹: سطح محصور بین منحنی $f(x) = \frac{۱}{۲}x + ۱$ و $g(x) = \sin x$ و خطوط $x = ۰$ و $x = ۲\pi$ را بیابید.

حل: سطح محصور مورد نظر به صورت زیر است.



با جابجایی سطح زیر محور xها به جای سطح خالی روی محور xها یک ذوزنقه با قاعده های ۱ و $\pi + ۱$ و ارتفاع ۲π حاصل می‌شود. مساحت این ذوزنقه برابر است با:

$$S = \frac{[(\pi+۱)+۱]\,(۲\pi)}{۲} = \pi(\pi + ۲)$$

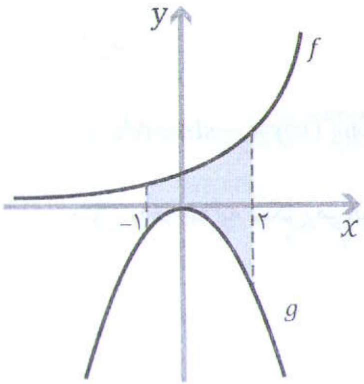
از فرمول محاسبه سطح محصور به کمک انتگرال‌گیری نیز همین نتیجه حاصل می‌شود:

$$S = \int_۰^{۲\pi} \left[\left(\tfrac{۱}{۲}x + ۱\right) - \sin x\right] dx = \left[\tfrac{۱}{۴}x^۲ + x + \cos x\right]_۰^{۲\pi}$$

$$= (\pi^۲ + ۲\pi + ۱) - (۱) = \pi^۲ + ۲\pi = \pi(\pi + ۲)$$

مثال ۱۰: سطح محصور بین منحنی‌های $f(x) = ۲^x$ و $g(x) = -x^۲$ و خطوط $x = -۱$ و $x = ۲$ را بیابید.

حل: سطح محصور مورد نظر به صورت مقابل می‌باشد، بنابراین داریم:



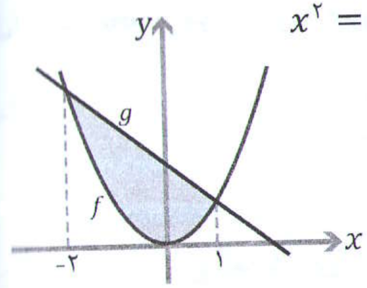
$$S = \int_{-۱}^{۲} [۲^x - (-x^۲)]\, dx$$

$$= \left[\frac{۲^x}{Ln ۲} + \frac{x^۳}{۳}\right]_{-۱}^{۲} = \frac{۷}{۲ Ln ۲} + ۳ = ۸/۰۵$$

مثال ۱۱: سطح محصور بین منحنی‌های $f(x) = x^۲$ و $g(x) = ۲ - x$ را بیابید.

حل: نقاط برخورد این دو منحنی عبارت است از:

$$x^۲ = ۲ - x \rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۱, -۲$$



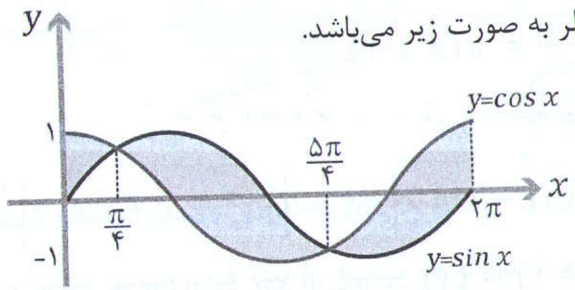
سطح مورد نظر به صورت مقابل می‌باشد. لذا داریم:

$$S = \int_{-۲}^{۱} [(۲ - x) - x^۲]\, dx$$

$$= \left[۲x - \frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۳}{۳}\right]_{-۲}^{۱} = ۴/۵$$

مثـال ۱۲: سـطح محصـور بـین دو منحنـی $f(x) = sin\, x$ و $g(x) = cos\, x$، خطوط $x = ۰$ و $x = ۲\pi$ را بیابید.

حل: سطح مورد نظر به صورت زیر می‌باشد.



ابتدا معادله مثلثاتی زیر را برای یافتن نقاط برخورد حل می‌کنیم.

$$sin\, x = cos\, x \rightarrow tan\, x = ۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \rightarrow (x_۱ = \frac{\pi}{۴}, x_۲ = \frac{۵\pi}{۴})$$

بنابراین داریم:

$$S = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} (cos\, x - sin\, x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}} (sin\, x - cos\, x)\, dx + \int_{\frac{۵\pi}{۴}}^{۲\pi} (cos\, x - sin\, x)\, dx = ۴\sqrt{۲}$$

در این مثال با توجه به شکل می‌توانستیم صرفه‌جویی کرده و بنویسیم:

$$S = ۲\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}} (sin\, x - cos\, x)\, dx = ۴\sqrt{۲}$$

تذکر: برای تعیین سطح محصور بین دو منحنی گاهی بهتر است منحنی‌ها را به صورت توابعی از y بیان کرده و سپس مساحت را محاسبه کنیم. در این حالت فرمول محاسبه سطح بین دو منحنی به صورت مقابل خواهد بود. $S = \int_a^b [f(y) - g(y)]\, dy$

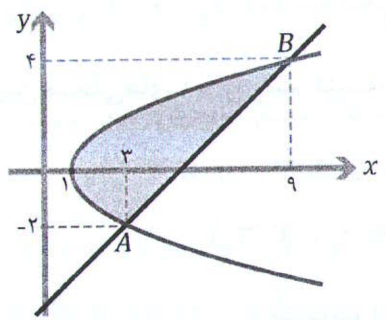
مثال ۱۳: سطح محصور بین سهمی $y^۲ = ۲x - ۲$ و خط $y = x - ۵$ را بیابید.

حل: برای یافتن نقاط برخورد دو منحنی، دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} y^۲ = ۲x - ۲ \\ y = x - ۵ \end{cases} \rightarrow (x - ۵)^۲ = ۲x - ۲ \rightarrow x^۲ - ۱۲x + ۲۷ = ۰$$

$$\rightarrow (x - ۳)(x - ۹) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۳ \rightarrow y = -۲ \rightarrow A(۳, -۲) \\ \text{یا} \\ x = ۹ \rightarrow y = ۴ \rightarrow B(۹, ۴) \end{cases}$$

سطح مورد نظر به صورت زیر است.



با توجه به شکل فوق، بهتر است فرض کنیم: $f(y) = y + ۵$ و $g(y) = \frac{۱}{۲}(y^۲ + ۲)$ و سپس سطح محصور را محاسبه کنیم.

$$S = \int_a^b [f(y) - g(y)]\, dy = \int_{-۲}^{۴} \left[(y + ۵) - \frac{۱}{۲}(y^۲ + ۲)\right] dy$$

$$= \int_{-۲}^{۴} \left(۴ + y - \frac{۱}{۲}y^۲\right) dy = \left[۴y + \frac{y^۲}{۲} - \frac{y^۳}{۶}\right]_{-۲}^{۴} = ۱۸$$

تمرین

۱- سطح محصور بین منحنی‌های زیر را رسم کنید، سپس مساحت مورد نظر را بیابید.

۱) $y = 1 - 2x \ , \ y = 0 \ , \ x = -2$

۲) $y = x^2 - 4x \ , \ y = 0$

۳) $y = (x-1)^3 \ , \ y = 0 \ , \ x = 0 \ , \ x = 2$

۴) $y = \cos x \ , \ y = 0 \ , \ x = -\frac{\pi}{3} \ , \ x = \frac{3\pi}{2}$

۵) $y = \frac{1}{x+1} \ , \ y = 0 \ , \ x = 0 \ , \ x = 3$

۶) $y = \tan x \ , \ y = 0 \ , \ x = \frac{\pi}{4}$

۷) $y = Ln\, x \ , \ y = e \ , \ y = 0 \ , \ x = 0$

۸) $y = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leq x \end{cases} \ , \ y = 0 \ , \ x = 4$

۲- سطح محصور بین منحنی‌های زیر را رسم کنید، سپس مساحت مورد نظر را بیابید.

۱) $y = \sin x \ , \ y = x + 1 \ , \ x = 0 \ , \ x = \frac{\pi}{2}$

۲) $y = \sqrt{x} \ , \ y = e^x \ , \ x = 0 \ , \ x = 1$

۳) $y = x^2 \ , \ y = x + 2$

۴) $y = x^2 \ , \ y = 4x - x^2$

۵) $y = x^3 \ , \ y = x$

۶) $y = x^2 \ , \ y = |x|$

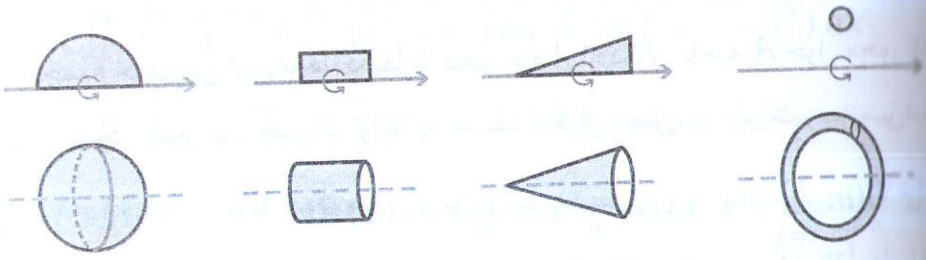
۷) $y = Ln\, x \ , \ y = x \ , \ x = 1 \ , \ x = e$

۸) $y = 4 - x \ , \ y = 3x \ , \ y = -4x$

حجم اجسام دوار

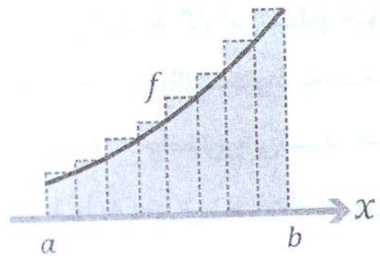
تعریف: جسم حاصل از دوران یک ناحیه مسطح متناهی حول یک محور که از درون ناحیه نمی‌گذرد، **جسم دوار** نامیده می‌شود.

مثال ۱۴: کره، استوانه، مخروط و چنبره (شکلی شبیه تیوپ اتومبیل) اجسام دواری هستند که از دوران یک سطح متناهی حول یک محور پدید آمده‌اند.



روش محاسبه حجم: در تلاش برای یافتن حجم یک جسم دوار با همان مشکلی روبرو می‌شویم که در محاسبه مساحت‌ها داشتیم. در اینجا نیز روش مشابهی را دنبال می‌کنیم، ابتدا تقریب می‌زنیم و سپس حد می‌گیریم. سپس از تعریف انتگرال، برای محاسبه حد استفاده می‌کنیم. حجم اجسام دوار را در دو حالت مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱) حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی f و محور xها



فرض کنیم تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و $f(x) \geq 0$ باشد. سطح محصور بین منحنی f و خطوط $x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$ را ناحیه A می‌نامیم. برای محاسبه مساحت این ناحیه، سطح زیر منحنی را با مجموع مستطیل‌هایی به صورت مقابل تقریب می‌زنیم.

فاصله $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کرده، قرار می‌دهیم: $x_0 = a$ ، $x_n = b$ و $x_i = a + (\frac{b-a}{n})i$ که $i = 0, 1, \cdots, n$. با دوران هر یک از

این مستطیل‌ها حول محور xها یک استوانه به شعاع قاعده $f(x_i)$ و ارتفاع $\frac{b-a}{n}$ حاصل می‌شود. مجموع حجم این استوانه‌ها یک تقریب برای حجم حاصل از دوران ناحیه A حول محور xها می‌باشد:

$$V \cong \sum_{i=۱}^{n} \pi[f(x_i)]^۲ (\frac{b-a}{n})$$

هر چقدر تعداد استوانه‌ها بیشتر باشد و یا به عبارت دیگر n را بزرگتر اختیار کنیم تقریب بهتری برای حجم مورد نظر خواهیم داشت. در حالتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند حد مجموع حجم این استوانه‌ها، دقیقاً با حجم حاصل از دوران ناحیه A حول محور xها برابر می‌شود. مقدار این حد را با توجه به تعریف انتگرال معین، به صورت زیر می‌توان نوشت:

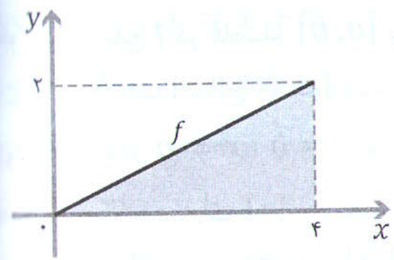
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=۱}^{n} \pi f^۲(x_i)(\frac{b-a}{n}) = \int_a^b \pi f^۲(x)\,dx$$

بنابراین حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی f و خطوط $x = a$ ، $x = b$ و $y = ۰$ حول محور xها به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^۲(x)\,dx}$$

مثال ۱۵: حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $f(x) = \frac{۱}{۲}x$ و خطوط $y = ۰$ و $x = ۴$ را حول محور xها بیابید.

حل: سطح محصور مورد نظر به صورت مقابل می‌باشد. هرگاه این سطح حول محور xها دوران کند یک مخروط به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۴ حاصل می‌شود. حجم این مخروط را به صورت زیر محاسبه می‌کردیم:



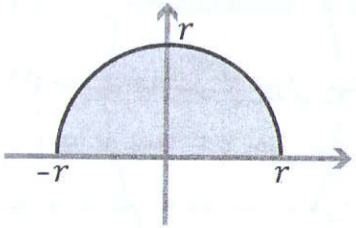
$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \to v = \frac{\pi}{۳}(۲)^۲(۴) = \frac{۱۶\pi}{۳}$$

از فرمول محاسبه حجم اجسام دوار به کمک انتگرال نیز، همین نتیجه به‌دست می‌آید:

$$V = \pi \int_۰^۴ (\frac{۱}{۲}x)^۲\,dx = \frac{\pi}{۴}\int_۰^۴ x^۲\,dx = \frac{\pi}{۴}\left[\frac{x^۳}{۳}\right]_۰^۴ = \frac{۱۶\pi}{۳}$$

مثال ۱۶: به کمک انتگرال‌گیری حجم یک کره به شعاع r را به‌دست آورید.

حل: یک کره به شعاع r را می‌توان از دوران نیم دایره $y = \sqrt{r^۲ - x^۲}$ حول محور xها به‌دست آورد. بنابراین حجم کره به شعاع r به صورت زیر محاسبه می‌شود.



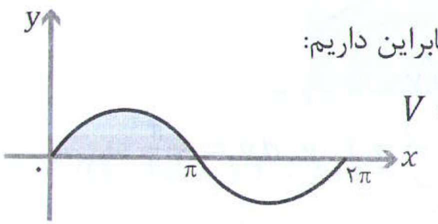
$$V = \pi \int_{-r}^{r} y^۲\,dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^۲ - x^۲)\,dx = ۲\pi \int_۰^r (r^۲ - x^۲)\,dx$$

$$= ۲\pi \left[r^۲x - \frac{۱}{۳}x^۳\right]_۰^r = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

(تذکر: تابع زیر انتگرال زوج و کران‌ها قرینه است)

مثال ۱۷: حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $f(x) = \sin x$ و $y = ۰$ در فاصله $[۰,\pi]$ حول محور xها را بیابید.

حل: سطح مورد نظر به صورت مقابل می‌باشد. بنابراین داریم:

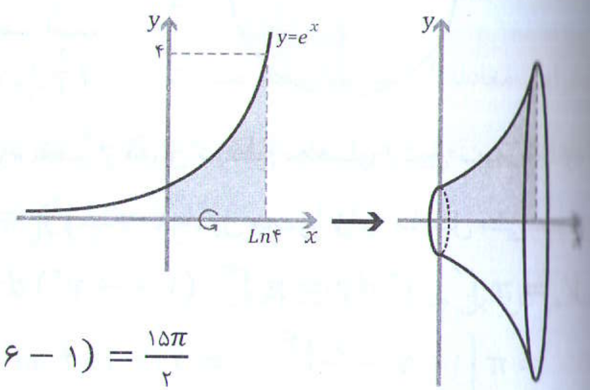


$$V = \pi \int_۰^{\pi} \sin^۲ x\,dx = \pi \int_۰^{\pi} \frac{۱-\cos ۲x}{۲}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{۲}\left[x - \frac{۱}{۲}\sin ۲x\right]_۰^{\pi} = \frac{\pi^۲}{۲}$$

مثال ۱۸: حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $f(x) = e^x$ و خطوط $x = ۰$ ، $y = ۰$ و $x = Ln\,۴$ حول محور xها را بیابید.

حل: سطح مورد نظر به صورت زیر می‌باشد. بنابراین داریم:



$$V = \pi \int_۰^{Ln\,۴} (e^x)^۲\,dx$$

$$= \pi \int_۰^{Ln\,۴} e^{۲x}\,dx$$

$$= \pi \left[\frac{۱}{۲}e^{۲x}\right]_۰^{Ln\,۴}$$

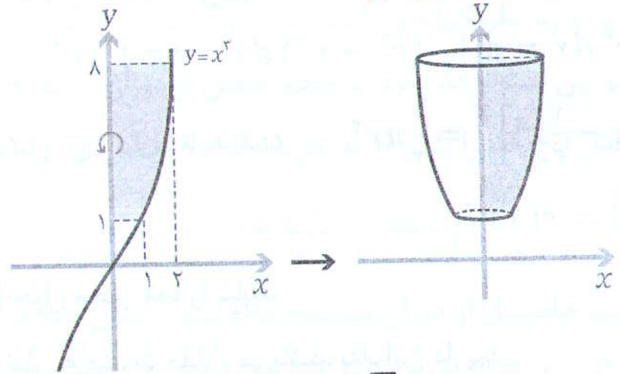
$$= \frac{\pi}{۲}[e^{۲Ln\,۴} - e^۰]$$

$$= \frac{\pi}{۲}[e^{Ln\,۴^۲} - e^۰] = \frac{\pi}{۲}(۱۶ - ۱) = \frac{۱۵\pi}{۲}$$

تذکر: گاهی اوقات برای تعیین حجم حاصل از دوران، بهتر است x را به صورت تابعی از y بیان کرده و سپس حجم را محاسبه کنیم. مثال‌های زیر را برای توضیح این مطلب آورده‌ایم.

مثال ۱۹: حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y = x^۳$ و خطوط $y = ۱$ ، $y = ۸$ و $x = ۰$ حول محور yها را بیابید.

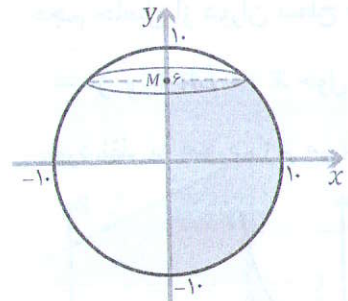
حل: سطح مورد نظر به صورت زیر می‌باشد.



$$y = x^۳ \to x = \sqrt[۳]{y} \to x = g(y) = \sqrt[۳]{y}$$

$$V = \pi \int_۱^۸ g^۲(y)\, dy = \pi \int_۱^۸ (\sqrt[۳]{y})^۲\, dy = \pi \int_۱^۸ y^{\frac{۲}{۳}}\, dy = \frac{۹۳\pi}{۵}$$

مثال ۲۰: در یک نیروگاه مخزنی کروی به قطر ۲۰متر تا ارتفاع ۱۶متر حاوی آب است. حجم آب موجود را بیابید.

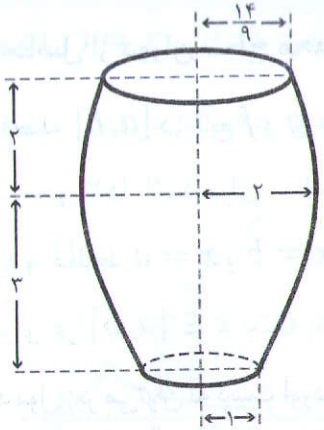


حل: ابتدا دایره‌ای به شعاع ۱۰ با معادله $x^۲ + y^۲ = ۱۰^۲$ به صورت مقابل را در نظر می‌گیریم. چون ارتفاع آب ۱۶ متر است مختصات نقطه M عبارت است از $(۰,۶)$.

مطابق شکل فوق، حجم مورد نظر از دوران سطح محصور بین نیم دایره $x = \sqrt{۱۰۰ - y^۲}$ و خطوط $y = ۶$ و $x = ۰$ حول محور yها حاصل می‌شود. بنابراین داریم:

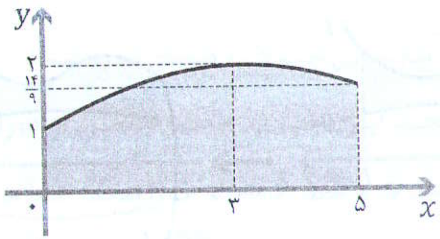
$$V = \pi \int_{-۱۰}^{۶} x^۲\, dy = \pi \int_{-۱۰}^{۶} (۱۰۰ - y^۲)\, dy$$

$$= \pi \left[۱۰۰y - \frac{y^۳}{۳}\right]_{-۱۰}^{۶} = ۱۱۹۴/۶\pi \ m^۳$$



مثال ۲۱: یک منبع با ویژگی‌هایی که در شکل مقابل نشان داده شده در اختیار است. هرگاه فرض کنیم این جسم از دوران قسمتی از یک سهمی حول محوری ایجاد گردیده، فرمولی برای محاسبه گنجایش این منبع در ارتفاع‌های متفاوت ارائه کنید.

حل: می‌توان چنین تصور کرد که این جسم از دوران سهمی شکل زیر حول محور xها پدید آمده است



ابتدا باید معادله سهمی را بیابیم. معادله یک سهمی به صورت $y = ax^۲ + bx + c$ می‌باشد، این سهمی از نقاط $(۰,۱)$ ، $(۳,۲)$ و $(۵,\frac{۱۴}{۹})$ می‌گذرد، لذا داریم:

$$\begin{cases} (۰,۱) \to ۰ + ۰ + c = ۱ \to c = ۱ \\ (۳,۲) \to ۹a + ۳b + c = ۲ \\ (۵,\frac{۱۴}{۹}) \to ۲۵a + ۵b + c = \frac{۱۴}{۹} \end{cases} \to \begin{cases} ۹a + ۳b = ۱ \\ ۲۵a + ۵b = \frac{۵}{۹} \end{cases} \to \begin{cases} a = -\frac{۱}{۹} \\ b = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

بنابراین معادله این سهمی به صورت $f(x) = \frac{-۱}{۹}x^۲ + \frac{۲}{۳}x + ۱$ می‌باشد. پس گنجایش این منبع در ارتفاع t $(۰ \leq t \leq ۵)$ عبارت است از:

$$V(t) = \pi \int_۰^t f^۲(x)\, dx = \pi \int_۰^t (\frac{-۱}{۹}x^۲ + \frac{۲}{۳}x + ۱)^۲\, dx$$

حجم کل این منبع برابر است با:

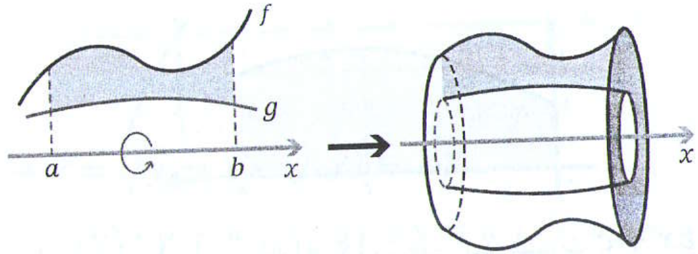
$$V(۵) = \pi \int_۰^۵ (\frac{-۱}{۹}x^۲ + \frac{۲}{۳}x + ۱)^۲\, dx = ۴۸/۷$$

۲) حجم حاصل از دوران سطح محصور بین دو منحنی f و g

هرگاه در فاصله $[a,b]$ دو تابع f و g پیوسته و نمودار هر دو تابع بالای محور xها یا هر دو تابع زیر محور xها باشند، برای محاسبه حجم حاصل از دوران سطح محصور بین نمودار این دو تابع و خطوط $x = a$ و $x = b$ حول محور xها، یکی از حالت‌های زیر را داریم:

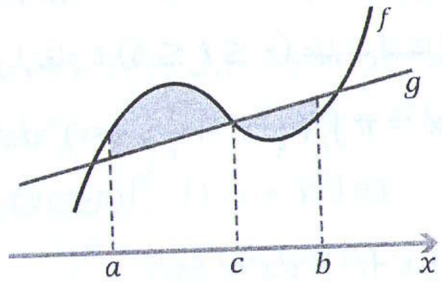
الف) اگر برای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم: $|g(x)| \le |f(x)|$، در این حالت حجم را به کمک فرمول زیر می‌توان به دست آورد.

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x) - g^2(x)\, dx}$$



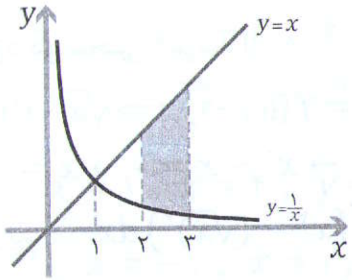
ب) دو تابع f و g در نقاطی هم‌دیگر را قطع می‌کنند، در این حالت برای محاسبه حجم حاصل از دوران ابتدا نقاط برخورد دو منحنی را پیدا کرده، سپس حجم هر قسمت را جداگانه حساب و با هم جمع می‌کنیم. به عنوان نمونه حجم حاصل از دوران سطح محصور دو منحنی f و g و خطوط $x = a$ و $x = b$ شکل زیر عبارت است از:

$$V = \pi \int_a^c \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx + \pi \int_c^b \left(g^2(x) - f^2(x)\right) dx$$



مثال ۲۲: سطح محصور بین منحنی‌های $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = x$ و خطوط $x = 2$ و $x = 3$ را حول محور xها دوران می‌دهیم، حجم تولید شده را بیابید.

حل: سطح مورد نظر به صورت مقابل است.



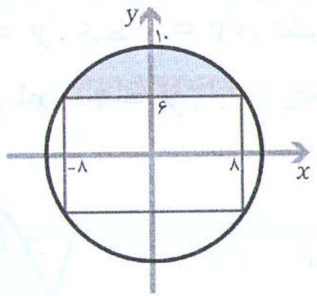
بنابراین داریم:

$$V = \pi \int_2^3 x^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right]_2^3 = ۱۹/۳۷$$

مثال ۲۳: در یک کره به شعاع ۱۰ حفره‌ای به قطر ۱۲ به موازات قطر ایجاد کرده‌ایم. حجم قسمت باقیمانده را بیابید(این جسم شبیه دانه‌های تسبیح است).

حل: مطابق شکل زیر حجم این جسم، حجم حاصل از دوران سطح محصور بین نیم دایره $y = \sqrt{10^2 - x^2}$ و خط $y = 6$ حول محور xها می‌باشد.



طول نقاط برخورد این دو منحنی عبارتند از:

$$\sqrt{10^2 - x^2} = 6 \to 100 - x^2 = 36 \to x^2 = 64 \to x = \pm 8$$

بنابراین داریم:

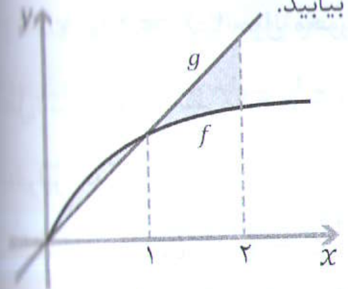
$$V = \pi \int_{-8}^{8} \left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2 - (6)^2\, dx$$

$$= \pi \int_{-8}^{8} (100 - x^2 - 36)\, dx = \pi \int_{-8}^{8} (64 - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^8 (64 - x^2)\, dx \quad \text{(تابع زیر انتگرال زوج و کران‌ها قرینه است)}$$

$$= 2\pi \left[64x - \frac{x^3}{3}\right]_0^8 = ۲۱۴۴/۷$$

مثال ۲۴: سطح محصور بین منحنی $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x$ و خط $x = ۲$ را حول محور xها دوران می‌دهیم حجم حاصل از دوران را بیابید.



حل: سطح مورد نظر به صورت مقابل می‌باشد. طول نقاط برخورد دو منحنی عبارتند از:

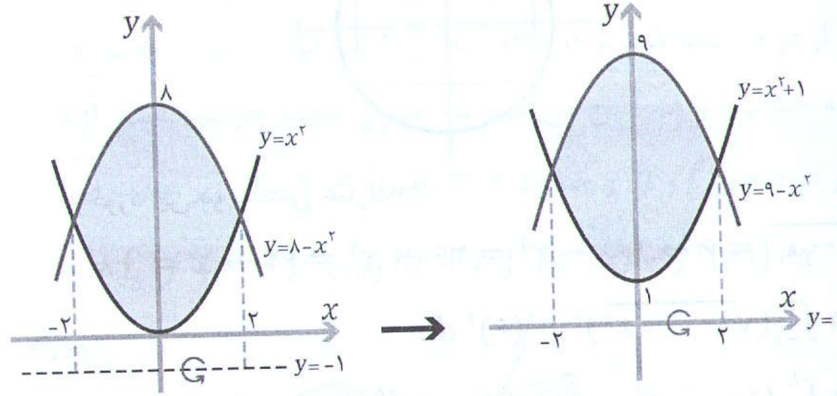
$$g(x) = f(x) \to x = \sqrt{x} \to x^۲ = x$$
$$\to x^۲ - x = ۰ \to x = ۰,۱$$

بنابراین داریم:

$$V = \pi \int_۰^۱ \left((\sqrt{x})^۲ - x^۲\right) dx + \pi \int_۱^۲ \left(x^۲ - (\sqrt{x})^۲\right) dx$$
$$= \pi \int_۰^۱ (x - x^۲)\, dx + \pi \int_۱^۲ (x^۲ - x)\, dx = \pi$$

مثال ۲۵: سطح محصور بین دو منحنی $y = x^۲$ و $y = ۸ - x^۲$ را حول محور $y = -۱$ دوران می‌دهیم. حجم حاصل از دوران را بیابید.

حل: ابتدا منحنی‌ها را به اندازه یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم تا بتوانیم محور دوران را به جای خط $y = -۱$، خط $y = ۰$ در نظر بگیریم. منحنی‌های جدید عبارتند از: $y = x^۲ + ۱$ و $y = ۹ - x^۲$



نقاط برخورد این دو منحنی عبارتند از: $x^۲ + ۱ = ۹ - x^۲ \to ۲x^۲ = ۸ \to x = \pm ۲$

بنابراین حجم حاصل از دوران این سطح که شکلی شبیه تیوپ اتومبیل می‌شود برابر است با:

$$V = \pi \int_{-۲}^{۲} \left((۹ - x^۲)^۲ - (x^۲ + ۱)^۲\right) dx = \pi \int_{-۲}^{۲} (۸۰ - ۲۰x^۲)\, dx = ۶۷۰/۲$$

تمرین

۱- سطح محصور بین منحنی‌های داده شده را رسم کنید، سپس در تمرین‌های ۱ تا ۶ حجم حاصل از دوران سطح حول محور xها و در تمرین ۷ و ۸ حول محور yها را بیابید.

۱) $y = x^۲ + ۱ \;,\; x = -۱ \;,\; x = ۲ \;,\; y = ۰$

۲) $y = \cos x \;,\; x = \frac{-\pi}{۲} \;,\; x = \frac{\pi}{۲} \;,\; y = ۰$

۳) $y = \frac{۱}{x} \;,\; x = ۱ \;,\; x = ۴ \;,\; y = ۰$

۴) $y = e^{-x} \;,\; x = -۱ \;,\; x = ۲ \;,\; y = ۰$

۵) $y = \sqrt{۴ - (x-۱)^۲} \;,\; x = ۰ \;,\; y = ۰$ (آن قسمتی از سطح که در ناحیه اول است)

۶) $y = \sqrt{|x|} \;,\; x = -۱ \;,\; x = ۴ \;,\; y = ۰$

۷) $۲x + ۳y = ۵ \;,\; x = ۰ \;,\; y = ۰$ (حول محور yها)

۸) $y = Ln\, x \;,\; y = Ln\, ۴ \;,\; x = ۰ \;,\; y = ۰$ (حول محور yها)

۲- سطح محصور بین منحنی‌های زیر را رسم کنید، سپس حجم حاصل از دوران این سطح حول محور xها را بیابید.

۱) $y = \sqrt{x} \;,\; y = ۲ \;,\; x = ۰$

۲) $y = \frac{۱}{۲}x^۲ + ۱ \;,\; y = ۳$

۳) $y = \sin x \;,\; y = ۱ + \sin x \;,\; x = ۰ \;,\; x = \pi$

۴) $y = e^{x} \;,\; y = e^{-x} \;,\; x = Ln\, ۴$

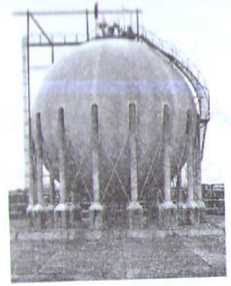
۵) $y = x^۳ \;,\; y = \sqrt{x}$

۶) $y = \sqrt{۴ - x^۲} \;,\; y = ۳ \;,\; x = -۲ \;,\; x = ۱$

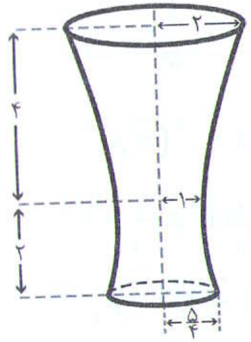
۷) $y = \frac{۱}{x} \;,\; y = ۴x \;,\; y = \frac{۱}{۲}$

۸) $y = x^۲ + ۱ \;,\; y = x + ۳ \;,\; x = -۲$

۳- یک مخزن کروی به شعاع ۸ متر تا ارتفاع ۱۱ متر حاوی یک ماده شیمیایی است. حجم ماده موجود را بیابید.



۴- مهندسان در طراحی اجزای یک کارخانه نیاز به قطعه‌ای با مشخصات مقابل دارند. با فرض اینکه سطح جانبی این قطعه از دوران قسمتی از یک سهمی حول یک محور پدید آمده باشد، حجم این قطعه را محاسبه کنید.

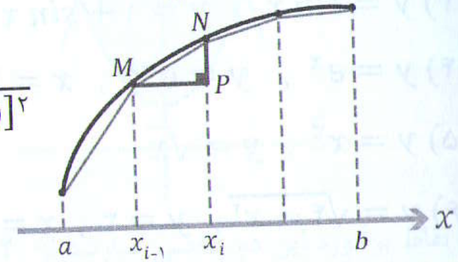


طول منحنی f

هرگاه تابع f در فاصله $[a,b]$ مشتق‌پذیر و f' در فاصله (a,b) پیوسته باشد برای محاسبه طول منحنی f بین دو خط $x=a$ و $x=b$ مشابه محاسبه سطح و حجم عمل می‌کنیم[1]. در اینجا روند کلی یافتن فرمول طول منحنی را توضیح می‌دهیم و وارد جزئیات نمی‌شویم. ابتدا فاصله $[a,b]$ را به n قسمت تقسیم کرده و در هر قسمت طول منحنی را با پاره‌خطی که وتر یک مثلث قائم الزاویه است تقریب می‌زنیم.

$$NP = f(x_i) - f(x_{i-1})\ ,\ MP = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

$$MN = \sqrt{MP^2 + NP^2}$$
$$= \sqrt{(\Delta x)^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$
$$= \Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2}$$

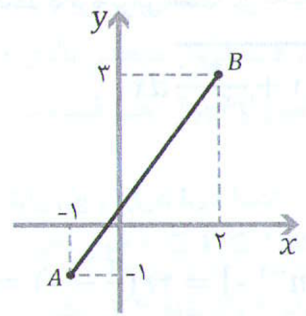


۱- در این کتاب تمام توابع مثال‌ها و تمرین‌های ارائه شده برای محاسبه طول منحنی، شرط پیوستگی تابع f' در فاصله (a,b) را دارند. در غیر این صورت، برای محاسبه طول منحنی، باید تابع را به صورت اجتماع چند تابع بنویسیم و طول هر قسمت را جداگانه محاسبه و سپس با هم جمع کنیم.

مجموع طول این پاره‌خط‌ها یک مقدار تقریبی برای طول منحنی در فاصله $[a,b]$ می‌باشد. حد مجموع طول این پاره‌خط‌ها هنگامی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند با طول واقعی منحنی برابر است. هرگاه طول منحنی را با L نمایش دهیم به کمک تعریف انتگرال معین، می‌توان حد مجموع را به صورت مقابل نوشت: $\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$

مثال ۲۶: طول منحنی $f(x) = \frac{4x+1}{3}$ بین خطوط $x=-1$ و $x=2$ را بیابید.

حل: این منحنی یک خط راست است و طول آن را می‌توان به کمک فرمول طول پاره خط به صورت زیر محاسبه کرد. مختصات دو سر پاره خط عبارتند از:



$$A(-1,-1)\ ,\ B(2,3)$$

$$L = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

از فرمول محاسبه طول به کمک انتگرال‌گیری نیز همین نتیجه به‌دست می‌آید.

$$L = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}\, dx = \frac{5}{3}\int_{-1}^{2} dx = \frac{5}{3}[x]_{-1}^{2} = 5$$

مثال ۲۷: متحرکی در صفحه مختصات از مبدا بر روی منحنی $f(x) = x\sqrt{x}$ به نقطه $(8,16\sqrt{2})$ می‌رود، طول مسیری که این متحرک پیموده حساب کنید.

حل: تابع f در فاصله $[0,8]$ مشتق‌پذیر است. پس می‌توان برای محاسبه طول از فرمول محاسبه طول یک منحنی به کمک انتگرال‌گیری استفاده کرد.

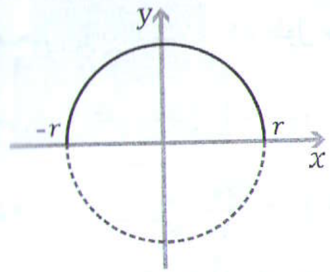
$$f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_0^8 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

انتگرال فوق با تغییر متغیر $u = 1 + \frac{9}{4}x$ حل می‌شود و داریم: $L = 24/246$

مثال ۲۸: محیط یک دایره به شعاع r را به کمک انتگرال‌گیری بیابید.

حل: دایره $x^۲ + y^۲ = r^۲$ را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه محیط دایره کافی است طول نیم دایره $y = \sqrt{r^۲ - x^۲}$ را محاسبه کنیم. این منحنی در فاصله $[-r, r]$ مشتق پذیر است و داریم: $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^۲-x^۲}}$



بنابراین محیط دایره برابر است با:

$$l = ۲\int_{-r}^{r}\sqrt{۱ + (\frac{-x}{\sqrt{r^۲-x^۲}})^۲}\,dx = ۲\int_{-r}^{r}\sqrt{۱ + \frac{x^۲}{r^۲-x^۲}}\,dx$$

$$= ۲\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{r^۲}{r^۲-x^۲}}\,dx = ۴r\int_{۰}^{r}\frac{۱}{\sqrt{r^۲-x^۲}}\,dx$$ (تابع زیر انتگرال زوج و کران‌ها قرینه است)

$$= ۴r\left[sin^{-۱}(\frac{x}{r})\right]_{۰}^{r} = ۴r[sin^{-۱}۱ - sin^{-۱}۰] = ۴r(\frac{\pi}{۲} - ۰) = ۲\pi r$$

نکته: برای محاسبه **محیط بیضی** مشابه محاسبه محیط دایره عمل می‌کنیم، ولی به انتگرالی می‌رسیم که حل آن غیر ممکن است. لذا برای محیط بیضی، فرمول‌های تقریبی متعددی ارائه شده است. بعضی از فرمول‌های ساده همراه با دقت کمتر این تقریب، عبارتند از:

$l \cong \pi\sqrt{۲(a^۲ + b^۲)}$, $L \cong ۲\pi\sqrt{ab}$ ($۲a$ و $۲b$ اقطار بیضی می‌باشند)

تذکر: در محاسبه طول بسیاری از منحنی‌ها، با انتگرال‌های دشوار و یا غیر ممکن مواجه می‌شویم، در مثال بعد نمونه‌هایی از این مطلب را آورده‌ایم. برای محاسبه چنین انتگرال‌های از روش‌های تقریبی یا ماشین‌حساب استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۹: طول منحنی‌های زیر در فاصله داده شده به کمک ماشین‌حساب محاسبه شده است.

۱) $f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳$, $-۱ \le x \le ۲$

$$f'(x) = x^۲ \to L = \int_{-۱}^{۲}\sqrt{۱ + (x^۲)^۲}\,dx = \int_{-۱}^{۲}\sqrt{۱ + x^۴}\,dx = ۴/۷۴$$

۲) $f(x) = e^x$, $-۲ \le x \le ۳$

$$f'(x) = e^x \to L = \int_{-۲}^{۳}\sqrt{۱ + (e^x)^۲}\,dx = \int_{-۲}^{۳}\sqrt{۱ + e^{۲x}}\,dx = ۲۱/۷۵$$

سطح جانبی اجسام دوار

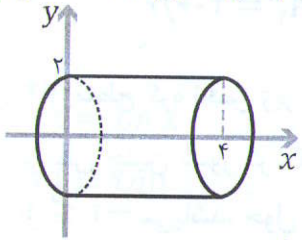
هرگاه تابع f در فاصله $[a, b]$ مشتق‌پذیر و نامنفی باشد، با دوران منحنی f حول محور xها یک سطح حاصل می‌شود. با عملیاتی نظیر محاسبه مساحت، حجم و طول منحنی، می‌توان فرمول زیر را برای محاسبه این سطح به‌دست آورد.

$$\boxed{A = ۲\pi\int_a^b f(x)\sqrt{۱ + [f'(x)]^۲}\,dx}$$

تذکر: اگر منحنی f پایین محور xها باشد سطح جانبی حاصل از فرمول فوق منفی می‌شود و لذا قدر مطلق آن را در نظر می‌گیریم. اگر قسمتی از منحنی بالای محور xها و قسمتی از منحنی پایین محور xها باشد، سطح حاصل از دوران هر قسمت را جداگانه حساب و سپس با هم جمع می‌کنیم.

مثال ۳۰: سطح حاصل از دوران منحنی $f(x) = ۲$ که $۰ \le x \le ۴$ حول محور xها را بیابید.

حل: سطح حاصل، سطح جانبی یک استوانه به شعاع ۲ و ارتفاع ۴ می‌باشد. لذا داریم:

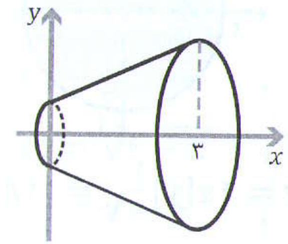


$$A = ۲\pi rh \to A = ۲\pi(۲)(۴) = ۱۶\pi$$

از فرمول محاسبه سطح دوار به کمک انتگرال نیز همین نتیجه به‌دست می‌آید.

$$f'(x) = ۰ \to A = ۲\pi\int_{۰}^{۴}۲\sqrt{۱ + (۰)^۲}\,dx = ۴\pi\int_{۰}^{۴}dx = ۴\pi[x]_{۰}^{۴} = ۱۶\pi$$

مثال ۳۱: سطح حاصل از دوران منحنی $f(x) = \frac{۱}{۲}x + ۱$ که $۰ \le x \le ۳$، حول محور xها را بیابید.

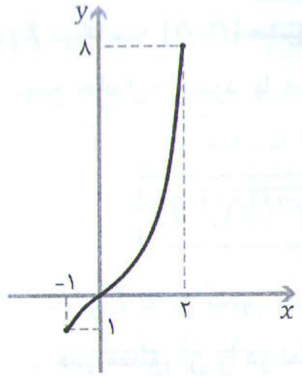


حل: شکل حاصل از دوران، یک مخروط ناقص می‌باشد. مساحت جانبی این جسم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f'(x) = \frac{۱}{۲} \to A = ۲\pi\int_{۰}^{۳}(\frac{۱}{۲}x + ۱)\sqrt{۱ + (\frac{۱}{۲})^۲}\,dx$$

$$A = \sqrt{۵}\pi\int_{۰}^{۳}(\frac{۱}{۲}x + ۱)\,dx = \sqrt{۵}\pi\left[\frac{۱}{۴}x^۲ + x\right]_{۰}^{۳} = \frac{۲۱\sqrt{۵}\pi}{۴}$$

مثال ۳۲: سطح حاصل از دوران منحنی $f(x) = x^۳$ که $-۱ \leq x \leq ۲$ حول محور xها را بیابید.



حل: نمودار این منحنی به صورت مقابل است.
چون قسمتی از سطح بالا و قسمتی در پایین محور xها می‌باشد، سطح حاصل از دوران هر قسمت را باید جداگانه حساب و با هم جمع کنیم. داریم: $f'(x) = ۳x^۲$

$$A_۱ = -۲\pi \int_{-۱}^{۰} x^۳\sqrt{۱ + (۳x^۲)^۲}\, dx = -۲\pi \int_{-۱}^{۰} x^۳\sqrt{۱ + ۹x^۴}\, dx$$

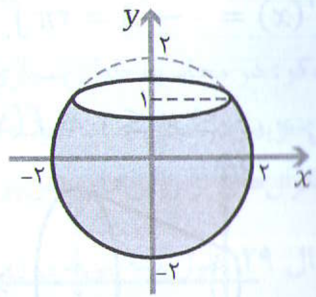
$$A_۲ = ۲\pi \int_{۰}^{۲} x^۳\sqrt{۱ + (۳x^۲)^۲}\, dx = ۲\pi \int_{۰}^{۲} x^۳\sqrt{۱ + ۹x^۴}\, dx$$

انتگرال‌های فوق با تغییر متغیر $u = ۱ + ۹x^۴$ حل می‌شوند و داریم:

$$(A_۱ = ۳/۵۶\ ,\ A_۲ = ۲۰۳/۰۴) \rightarrow A = A_۱ + A_۲ = ۲۰۶/۶$$

مثال ۳۳: سطح کره ناقص زیر را به‌دست آورید.

حل: می‌توان چنین تصور کرد که این سطح از دوران نیم دایره $x = \sqrt{۴ - y^۲}$ که $-۲ \leq y \leq ۱$ می‌باشد، حول محور yها پدید آمده است. بنابراین داریم:



$$f(y) = \sqrt{۴ - y^۲} \rightarrow f'(y) = \frac{-۲y}{۲\sqrt{۴-y^۲}} = \frac{-y}{\sqrt{۴-y^۲}}$$

$$A = ۲\pi \int_{-۲}^{۱} f(y)\sqrt{۱ + [f'(y)]^۲}\, dy$$

$$= ۲\pi \int_{-۲}^{۱} \sqrt{۴ - y^۲}\ \sqrt{۱ + (\frac{-y}{\sqrt{۴-y^۲}})^۲}\, dy$$

$$= ۲\pi \int_{-۲}^{۱} \sqrt{۴ - y^۲}\ \frac{۲}{\sqrt{۴-y^۲}} dy = ۲\pi \int_{-۲}^{۱} ۲\, dy = ۴\pi[y]_{-۲}^{۱} = ۱۲\pi$$

توضیح : $\sqrt{۱ + (\frac{-y}{\sqrt{۴-y^۲}})^۲} = \sqrt{۱ + \frac{y^۲}{۴-y^۲}} = \sqrt{\frac{۴-y^۲+y^۲}{۴-y^۲}} = \sqrt{\frac{۴}{۴-y^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۴-y^۲}}$

تمرین

۱- طول منحنی‌های زیر را در فاصله داده شده بیابید.

۱) $f(x) = ۳ - ۲x \quad , \quad ۰ \leq x \leq ۲$

۲) $f(x) = \sqrt{x^۳} \quad , \quad ۰ \leq x \leq ۴$

۳) $f(x) = \sqrt{(x - ۲)^۳} \quad , \quad ۳ \leq x \leq ۶$

۴) $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲} \quad , \quad ۰ \leq x \leq ۲$

۵) $f(x) = \frac{۲}{۳}\sqrt{(x^۲ + ۱)^۳} \quad , \quad ۰ \leq x \leq ۳$

۶) $f(x) = ln(cos\, x) \quad , \quad ۰ \leq x \leq \frac{\pi}{۴}$

۲- طول منحنی‌های زیر را در فاصله داده شده به کمک ماشین‌حساب یا نرم‌افزارهای ریاضی بیابید. لازم به تذکر است که برای محاسبه انتگرال معین توابع مثلثاتی باید ماشین‌حساب در حالت رادیان $(MODE\ Rad)$ قرار گیرد.

۱) $f(x) = x^۲ \quad , \quad -۱ \leq x \leq ۲$

۲) $f(x) = Ln\, x \quad , \quad ۱ \leq x \leq ۴$

۳) $f(x) = tan\, x \quad , \quad ۰ \leq x \leq \frac{۲\pi}{۵}$

۴) $f(x) = sin\, x \quad , \quad ۰ \leq x \leq ۲\pi$

۳- سطح حاصل از دوران منحنی‌های زیر را در فاصله داده شده حول محور xها بیابید.

۱) $f(x) = ۳ - ۲x \quad , \quad -۱ \leq x \leq \frac{۱}{۲}$

۲) $f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ \quad , \quad ۱ \leq x \leq ۳$

۳) $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲} \quad , \quad ۰ \leq x \leq ۱$

۴) $f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad ۰ \leq x \leq ۳/۷۵$

۴- به کمک انتگرال‌گیری نشان دهید که سطح یک کره به شعاع r، برابر $۴\pi r^۲$ می‌باشد.

۳-۶ انتگرال‌های غیرعادی

در بخش قبل انتگرال معین تابع f را در فاصله بسته $[a,b]$ تعریف کردیم و نیز گفتیم که اگر f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، انتگرال‌پذیر خواهد بود و به دنبال آن تنها به بررسی خواص انتگرال توابع پیوسته پرداختیم.

در این بخش به تعمیم تعریف و بررسی انتگرال روی فاصله‌های $(-\infty,a]$ ، $[a,+\infty)$ و $(-\infty,+\infty)$ و نیز به تعریف و بررسی انتگرال بعضی از توابع ناپیوسته می‌پردازیم. این دو نوع انتگرال را، انتگرال غیرعادی[1] می‌نامند.

نوع اول انتگرال‌های غیرعادی[2]: حالت‌هایی که کران انتگرال بی‌نهایت است.

حالت اول: هرگاه f بر $[a,+\infty)$ پیوسته باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \underset{t\to+\infty}{Lim}\int_a^t f(x)\,dx$$

حالت دوم: هرگاه f بر $(-\infty,a]$ پیوسته باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \underset{t\to-\infty}{Lim}\int_t^a f(x)\,dx$$

حالت سوم: هرگاه f بر $(-\infty,+\infty)$ پیوسته و $c\in\mathbb{R}$ باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

هرگاه مقدار انتگرال در هر یک از حالت‌های فوق یک عدد حقیقی شود، می‌گوییم انتگرال موجود است و یا انتگرال همگرا می‌باشد، در غیر این صورت می‌گوییم انتگرال موجود نمی‌باشد و یا انتگرال واگرا است.

مثال ۱: انتگرال‌های زیر از نوع انتگرال‌های غیرعادی می‌باشند، تابع زیر انتگرال بر فاصله انتگرال‌گیری پیوسته است، محاسبات زیر همگرایی یا واگرایی آنها را مشخص می‌کند.

۱) $\int_۱^{+\infty}\frac{۱}{x}dx = \underset{t\to+\infty}{Lim}\int_۱^t\frac{۱}{x}dx = \underset{t\to+\infty}{Lim}[Ln|x|]_۱^t$

$= \underset{t\to+\infty}{Lim}(Ln\,t - Ln\,۱) = +\infty - ۰ = +\infty$ (واگرا)

۲) $\int_۱^{+\infty}\frac{۱}{x^۲}dx = \underset{t\to+\infty}{Lim}\int_۱^t\frac{۱}{x^۲}dx = \underset{t\to+\infty}{Lim}\left[-\frac{۱}{x}\right]_۱^t$

$= \underset{t\to+\infty}{Lim}(۱-\frac{۱}{t}) = ۱ - ۰ = ۱$ (همگرا)

۳) $\int_{-\infty}^{۰} e^{-x}\,dx = \underset{t\to-\infty}{Lim}\int_t^{۰} e^{-x}\,dx = \underset{t\to-\infty}{Lim}[-e^{-x}]_t^{۰}$

$= \underset{t\to-\infty}{Lim}[e^{-t} - e^{۰}] = (+\infty) - ۱ = +\infty$ (واگرا)

۴) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{۱}{۱+x^۲}dx = \int_{-\infty}^{۰}\frac{۱}{۱+x^۲}dx + \int_{۰}^{+\infty}\frac{۱}{۱+x^۲}dx$

$= \underset{t\to-\infty}{Lim}\int_t^{۰}\frac{۱}{۱+x^۲}dx + \underset{t\to+\infty}{Lim}\int_{۰}^t\frac{۱}{۱+x^۲}dx$

$= \underset{t\to-\infty}{Lim}[tan^{-۱}x]_t^{۰} + \underset{t\to+\infty}{Lim}[tan^{-۱}x]_{۰}^t$

$= \underset{t\to-\infty}{Lim}(۰ - tan^{-۱}t) + \underset{t\to+\infty}{Lim}(tan^{-۱}t - ۰)$

$= \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} = \pi$ (همگرا)

۵) $\int_{۰}^{+\infty} cos\,x\,dx = \underset{t\to+\infty}{Lim}\int_{۰}^t cos\,x\,dx = \underset{t\to+\infty}{Lim}[sin\,x]_{۰}^t$

$= \underset{t\to+\infty}{Lim}[sin\,t - ۰] = \underset{t\to+\infty}{Lim}\,sin\,t$

با تغییر مقدار t ، مقدار $sin\,t$ بین ۱ − و ۱ نوسان می‌کند، بنابراین حد موجود نیست و لذا انتگرال واگرا است.

تذکر: با وجود اینکه رفتار دو تابع $y=\frac{۱}{x}$ و $y=\frac{۱}{x^۲}$ برای $x>۰$ شبیه هم است، ولی $\int_۱^{+\infty}\frac{۱}{x}dx$ واگرا و $\int_۱^{+\infty}\frac{۱}{x^۲}dx$ همگرا می‌باشند. تعبیر هندسی این مطلب را می‌توان چنین بیان کرد: « سطح زیر منحنی در یکی متناهی و در دیگری نامتناهی است! »

۱- این نوع انتگرال‌ها را انتگرال‌ناسره، انتگرال مجازی و یا انتگرال نامتعارف نیز می‌گویند.

۲- از این نوع انتگرال‌ها در مباحثی مانند تبدیلات لاپلاس، سری‌ها و انتگرال فوریه در کتاب ریاضیات عمومی دو، فصل‌های ۸ ، ۹ و ۱۰ استفاده می‌کنیم.

نوع دوم انتگرال‌های غیرعادی: حالت‌هایی که تابع زیر انتگرال ناپیوسته است.

حالت اول: هرگاه f بر $[a,b)$ پیوسته و در b ناپیوسته باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{t\to b^-}{Lim}\int_a^t f(x)\,dx$$

حالت دوم: هرگاه f بر $(a,b]$ پیوسته و در a ناپیوسته باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{t\to a^+}{Lim}\int_t^b f(x)\,dx$$

حالت سوم: هرگاه f بر $[a,b]$ به جز در c $(a<c<b)$ پیوسته باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

هرگاه مقدار انتگرال در هر یک از حالت‌های فوق یک عدد حقیقی شود می‌گوییم انتگرال موجود است و یا انتگرال همگرا می‌باشد، در غیر این صورت می‌گوییم انتگرال موجود نمی‌باشد یا انتگرال واگرا است.

مثال ۲: انتگرال‌های زیر از نوع دوم انتگرال‌های غیرعادی و ناپیوستگی در توابع زیر انتگرال، از نوع ناپیوستگی نامتناهی می‌باشد[1]. محاسبات انجام شده همگرایی یا واگرایی آنها را مشخص می‌کند.

۱) $\int_{۰}^{۴}\frac{۱}{\sqrt{x}}\,dx$

تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ بر فاصله $(۰,۴]$ پیوسته و در $x=۰$ ناپیوسته است، پس بنابر تعریف می‌توان نوشت:

$$\int_{۰}^{۴}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \underset{t\to ۰^+}{Lim}\int_t^{۴}\frac{۱}{\sqrt{x}}\,dx = \underset{t\to ۰^+}{Lim}\left[۲\sqrt{x}\right]_t^{۴} = \underset{t\to ۰^+}{Lim}\left[۴-۲\sqrt{t}\right] = ۴ \quad \text{(همگرا)}$$

۲) $\int_{-۴}^{-۲}\frac{۱}{x+۲}\,dx$

تابع $f(x)=\frac{۱}{x+۲}$ بر فاصله $[-۴,-۲)$ پیوسته و در $x=-۲$ ناپیوسته است، پس بنابر تعریف می‌توان نوشت:

۱- ناپیوستگی‌ها را به سه دسته رفع شدنی، جهشی و نامتناهی تقسیم می‌کنند. توضیحات بیشتر را در بخش ۳-۲ مطالعه کنید.

$$\int_{-۴}^{-۲}\frac{dx}{x+۲} = \underset{t\to -۲^-}{Lim}\int_{-۴}^{t}\frac{۱}{x+۲}\,dx = \underset{t\to -۲^-}{Lim}\left[Ln|x+۲|\right]_{-۴}^{t}$$

$$= \underset{t\to -۲^-}{Lim}\left[Ln|t+۲| - Ln\,۲\right] = (-\infty) - Ln\,۲ = -\infty \quad \text{(واگرا)}$$

۳) $\int_{-۱}^{۲}\frac{۱}{x^۲}\,dx$

تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ در تمام نقاط فاصله $[-۱,۲]$ به جز در $x=۰$ پیوسته است، پس بنابر تعریف می‌توان نوشت:

$$\int_{-۱}^{۲}\frac{۱}{x^۲}\,dx = \int_{-۱}^{۰}\frac{۱}{x^۲}\,dx + \int_{۰}^{۲}\frac{۱}{x^۲}\,dx$$

$$= \underset{t\to ۰^-}{Lim}\int_{-۱}^{t}\frac{۱}{x^۲}\,dx + \underset{t\to ۰^+}{Lim}\int_{t}^{۲}\frac{۱}{x^۲}\,dx$$

$$= \underset{t\to ۰^-}{Lim}\left[-\frac{۱}{x}\right]_{-۱}^{t} + \underset{t\to ۰^+}{Lim}\left[-\frac{۱}{x}\right]_{t}^{۲}$$

$$= \underset{t\to ۰^-}{Lim}\left[-\frac{۱}{t}-۱\right] + \underset{t\to ۰^+}{Lim}\left[-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{t}\right]$$

$$= (+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad \text{(واگرا)}$$

تذکر: اگر بدون توجه به ناپیوستگی تابع در $x=۰$ انتگرال می‌گرفتیم نتیجه نادرست زیر حاصل می‌شد.

$$\int_{-۱}^{۲}\frac{۱}{x^۲}\,dx = \left[-\frac{۱}{x}\right]_{-۱}^{۲} = -\frac{۳}{۲}$$

۴) $\int_{-۱}^{۸}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}\,dx$

تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$ در تمام نقاط فاصله $[-۱,۸]$ به جز در $x=۰$ پیوسته است، پس بنابر تعریف می‌توان نوشت:

$$\int_{-۱}^{۸}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}\,dx = \int_{-۱}^{۰}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}\,dx + \int_{۰}^{۸}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}\,dx$$

$$= \underset{t\to ۰^-}{Lim}\int_{-۱}^{t}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}\,dx + \underset{t\to ۰^+}{Lim}\int_{t}^{۸}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}\,dx$$

$$= \underset{t\to ۰^-}{Lim}\left[\frac{۳}{۲}\,x^{\frac{۲}{۳}}\right]_{-۱}^{t} + \underset{t\to ۰^+}{Lim}\left[\frac{۳}{۲}\,x^{\frac{۲}{۳}}\right]_{t}^{۸}$$

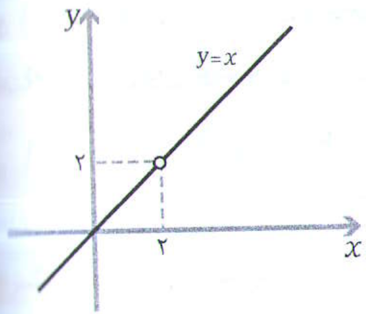
$$= \frac{۳}{۲}\,(۰-۱) + \frac{۳}{۲}\,(۴-۰) = \frac{۹}{۲} \quad \text{(همگرا)}$$

مثال ۳: انتگرال‌های زیر از نوع دوم انتگرال‌های غیرعادی و ناپیوستگی در توابع زیر انتگرال، از نوع ناپیوستگی رفع شدنی یا جهشی می‌باشد. محاسبات انجام شده همگرایی یا واگرایی آنها را مشخص می‌کند.

۱) $\int_0^2 \frac{x^2-2x}{x-2}\,dx$

تابع زیر انتگرال را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{x-2} = \frac{x(x-2)}{x-2} = x \ , \ x \neq 2$$



نمودار این تابع به صورت مقابل است، بنابراین ناپیوستگی تابع در نقطه $x = 2$ از نوع رفع شدنی می‌باشد و تابع بر فاصله $[0,2)$ پیوسته است. پس این انتگرال غیرعادی را به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد.

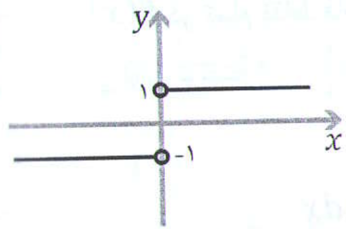
$$\int_0^2 \frac{x^2-2x}{x-2}\,dx = \lim_{t\to 2^-} \int_0^t \frac{x^2-2x}{x-2}\,dx = \lim_{t\to 2^-} \int_0^t x\,dx$$

$$= \lim_{t\to 2^-} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^t = \lim_{t\to 2^-}\left(\frac{t^2}{2} - 0\right) = 2 \quad \text{(همگرا)}$$

۲) $\int_0^2 \frac{|x|}{x}\,dx$

تابع زیر انتگرال را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



نمودار این تابع به صورت مقابل است. بنابراین ناپیوستگی تابع در نقطه $x = 0$ از نوع جهشی می‌باشد و تابع بر فاصله $(0,2]$ پیوسته است. پس این انتگرال غیرعادی را به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد.

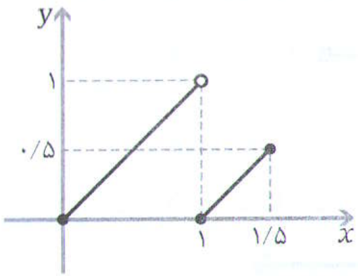
$$\int_0^2 \frac{|x|}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^2 \frac{|x|}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^2 dx = \lim_{t\to 0^+} [x]_t^2$$

$$= \lim_{t\to 0^+}(2 - t) = 2 \quad \text{(همگرا)}$$

۳) $\int_0^{1.5} (x - [x])\,dx$

تابع زیر انتگرال را در فاصله $[0,1/5]$ به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(x) = x - [x] = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ x - 1 & 1 \le x \le 1.5 \end{cases}$$



نمودار این تابع به صورت مقابل است، بنابراین ناپیوستگی تابع در نقطه $x = 1$ از نوع جهشی می‌باشد. تابع بر فاصله‌های $[0,1)$ و $[1,1/5]$ پیوسته است، پس این انتگرال غیرعادی را به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد.

$$\int_0^{1.5}(x-[x])\,dx = \int_0^1 (x-[x])\,dx + \int_1^{1.5}(x-[x])\,dx$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t x\,dx + \int_1^{1.5}(x-1)\,dx = \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^t + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^{1.5}$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\left(\frac{t^2}{2}\right) + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \quad \text{(همگرا)}$$

نکته: اگر تابع f در همه نقاط فاصله $[a,b]$ به جز تعداد متناهی نقطه ناپیوسته باشد،

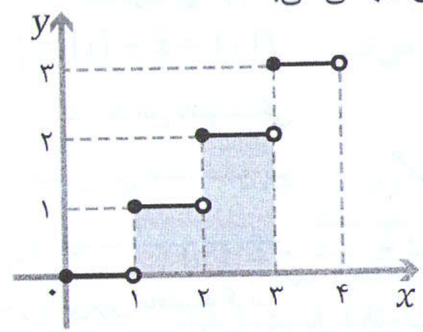
الف) اگر حداقل یکی از نقاط ناپیوستگی از نوع ناپیوستگی نامتناهی باشد، $\int_a^b f(x)\,dx$ ممکن است موجود باشد و ممکن است موجود نباشد (مانند نمونه‌های مثال ۲).

ب) اگر نقاط ناپیوستگی از نوع رفع شدنی یا جهشی باشد، $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود است (مانند نمونه‌های مثال ۳). برای محاسبه سریع این انتگرال‌ها به روش زیر می‌توان عمل کرد:

«اگر نقاط ناپیوستگی از نوع رفع شدنی هستند، فرض می‌کنیم تابع در آن نقطه پیوسته است و انتگرال را محاسبه می‌کنیم و اگر نقاط ناپیوستگی از نوع جهشی هستند، ابتدا انتگرال را به صورت مجموع چند انتگرال که تابع زیر انتگرال بر فاصله‌های انتگرال‌گیری مگر احتمالاً در نقاط انتهایی فاصله، پیوسته است، می‌نویسیم؛ سپس فرض می‌کنیم تابع در نقاط ناپیوسته، پیوسته است و هر یک از انتگرال‌ها را محاسبه و سپس با هم جمع می‌کنیم.»

می‌توان مطلب فوق را چنین تعبیر کرد که چون پاره خط فاقد مساحت می‌باشد پس اگر به یک سطح تعداد متناهی پاره خط اضافه یا کم کنیم مساحت آن تغییر نمی‌کند.

مثال ۴: نمودار تابع $f(x) = [x]$ به صورت زیر است. این تابع در فاصله $[۰,۳]$ دارای سه نقطه ناپیوستگی از نوع جهشی می‌باشد.



برای محاسبه $\int_۰^۳ f(x)\,dx$ با توجه به نکته قبل می‌توان نوشت:

$$\int_۰^۳ [x]\,dx = \int_۰^۱ [x]\,dx + \int_۱^۲ [x]\,dx + \int_۲^۳ [x]\,dx$$

$$= \int_۰^۱ (۰)dx + \int_۱^۲ ۱\,dx + \int_۲^۳ ۲\,dx$$

$$= c\Big|_۰^۱ + x\Big|_۱^۲ + ۲x\Big|_۲^۳ = ۰ + ۱ + ۲ = ۳$$

همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های غیرعادی: گاهی در بعضی از مسائل فقط تشخیص همگرایی یا واگرایی انتگرال لازم است و محاسبه انتگرال مشکل و گاهی غیر ممکن است. در چنین وضعیتی قضیه زیر می‌تواند مفید باشد. هر چند آن را برای یکی از حالت‌های انتگرال‌های غیرعادی نوع یک بیان می‌کنیم ولی مشابه این قضیه برای سایر حالت‌های نوع یک و حالت‌های نوع دو درست می‌باشد.

قضیه (آزمون مقایسه): فرض کنید توابع f و g در فاصله $[a,+\infty)$ پیوسته باشند و در این فاصله $۰ \leq f(x) \leq g(x)$ باشد؛ در این صورت:

الف) اگر $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ نیز همگرا است.

ب) اگر $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ واگرا باشد، آنگاه $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ نیز واگرا است.

مثال ۵: همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_۱^{+\infty} \frac{۱}{x^۲(۱+e^x)}\,dx$ را مورد بررسی قرار دهید.

حل: در این انتگرال برای $x \geq ۱$ داریم:

$$۱ < ۱ + e^x \rightarrow x^۲ < x^۲(۱ + e^x) \rightarrow \frac{۱}{x^۲(۱+e^x)} < \frac{۱}{x^۲}$$

بنابر مثال یک داریم: $\int_۱^{+\infty} \frac{۱}{x^۲}\,dx = ۱$

چون $\int_۱^{+\infty} \frac{۱}{x^۲}\,dx$ همگرا می‌باشد طبق آزمون مقایسه، انتگرال $\int_۱^{+\infty} \frac{۱}{x^۲(۱+e^x)}\,dx$ نیز همگرا است و داریم: $\int_۱^{+\infty} \frac{dx}{x^۲(۱+e^x)} \leq ۱$

مثال ۶: همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_۲^{+\infty} \frac{۱}{Ln\,x}\,dx$ را مورد بررسی قرار دهید.

حل: در این انتگرال برای $x \geq ۲$ داریم: $۰ < Ln\,x < x \rightarrow \frac{۱}{x} < \frac{۱}{Ln\,x}$

بنابر مثال یک داریم: $\int_۲^{+\infty} \frac{۱}{x}\,dx = +\infty$

چون $\int_۲^{+\infty} \frac{۱}{x}\,dx$ واگرا می‌باشد طبق آزمون مقایسه، انتگرال $\int_۲^{+\infty} \frac{۱}{Ln\,x}\,dx$ نیز واگرا است و داریم: $\int_۲^{+\infty} \frac{۱}{Ln\,x}\,dx = +\infty$

مثال ۷: همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_۰^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{x+x^۳}}\,dx$ را مورد بررسی قرار دهید.

حل: انتگرال فوق را به صورت مجموع دو انتگرال غیر عادی زیر می‌توان نوشت:

$$\int_۰^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{x+x^۳}}\,dx = \int_۰^۱ \frac{۱}{\sqrt{x+x^۳}}\,dx + \int_۱^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{x+x^۳}}\,dx = I_۱ + I_۲$$

انتگرال $I_۱$ از نوع دوم و برای $۰ < x \leq ۱$ داریم:

$$۰ < \sqrt{x} < \sqrt{x + x^۳} \rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x+x^۳}} < \frac{۱}{\sqrt{x}} \rightarrow \int_۰^۱ \frac{۱}{\sqrt{x+x^۳}}\,dx < \int_۰^۱ \frac{۱}{\sqrt{x}}\,dx = ۲$$

انتگرال $I_۲$ از نوع اول و برای $x \geq ۱$ داریم:

$$۰ < \sqrt{x^۳} < \sqrt{x + x^۳} \rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x+x^۳}} < \frac{۱}{\sqrt{x^۳}} \rightarrow \int_۱^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{x+x^۳}}\,dx < \int_۱^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{x^۳}}\,dx = ۲$$

پس بنابر قضیه آزمون مقایسه انتگرال‌های $I_۱$ و $I_۲$ همگرا می‌باشند و لذا انتگرال داده شده، همگرا و حداکثر مقدار آن ۴ است.

تمرین

۱- همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های داده شده را مشخص کرده، در صورت همگرایی مقدار آنها را تعیین کنید.

۱) $\int_{۲}^{+\infty} \frac{۱}{x-۱} dx$ ۲) $\int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{x\sqrt{x}} dx$

۳) $\int_{-\infty}^{۰} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۱}} dx$ ۴) $\int_{-\infty}^{۱} \frac{۱}{(۲x-۳)^{۲}} dx$

۵) $\int_{۱}^{+\infty} e^{-۲x} dx$ ۶) $\int_{۱}^{+\infty} \frac{Ln\, x}{x} dx$

۷) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx$ ۸) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{x^{۲}+۴} dx$

۹) $\int_{۱}^{+\infty} Ln\, x\, dx$ ۱۰) $\int_{-\infty}^{۱} xe^{x} dx$

۱۱) $\int_{۰}^{+\infty} \sin ۲x\, dx$ ۱۲) $\int_{۰}^{+\infty} \cos ۲x\, dx$

۲- همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های داده شده را مشخص کرده، در صورت همگرایی مقدار آن را تعیین کنید.

۱) $\int_{۲}^{۵} \frac{۱}{x-۲} dx$ ۲) $\int_{۱}^{۹} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۹}} dx$

۳) $۵ \int_{۴}^{۵} \frac{۱}{\sqrt[۵]{(۵-x)^{۲}}} dx$ ۴) $\int_{۰}^{۲} \frac{۱}{x^{۲}} dx$

۵) $\int_{۱}^{e} \frac{۱}{x\, Ln\, x} dx$ ۶) $\int_{۰}^{۱} \frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}} dx$

۷) $\int_{۰}^{۲} \frac{۱}{x-۱} dx$ ۸) $\int_{۰}^{۲} \frac{۱}{(x-۱)^{۲}} dx$

۹) $\int_{۱}^{۳} \frac{|x-۱|}{x-۱} dx$ ۱۰) $\int_{۲}^{۳} \frac{x}{۳-[x]} dx$

۱۱) $\int_{-۱}^{۲} (۲x-[x])\, dx$ ۱۲) $\int_{۰}^{۳} (۲[x]-۱)\, dx$

۱۳) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \tan x\, dx$ ۱۴) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cot x\, dx$

۳- به کمک آزمون مقایسه همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $\int_{۰}^{+\infty} \frac{۱}{x^{۲}+۳} dx$ ۲) $\int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{e^{x}+۲} dx$

۳) $\int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{x^{۳}+۱}} dx$ ۴) $\int_{۱}^{+\infty} \frac{\sin^{۲} x}{x^{۳}} dx$

۵) $\int_{۰}^{+\infty} \frac{۱}{ln(x+۲)} dx$ ۶) $\int_{۲}^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}} dx$

فصل هفتم

اعداد مختلط

مقدمه: پاسخ بسیاری از مسائلی که در ریاضیات و یا سایر رشته‌های علوم مطرح می‌شود، به حل یک معادله یا یک دستگاه معادلات منجر می‌گردد. در طول تاریخ مجموعه اعداد بارها توسعه یافته تا جواب معادله‌های مختلف را در برگیرد. به عنوان نمونه برای اینکه معادله $x+۳=۱$ دارای جواب باشد اعداد صحیح منفی را معرفی کردند؛ برای اینکه معادله $۲x=۳$ دارای جواب باشد مجموعه اعداد گویا ساخته شد؛ برای اینکه معادله $x^{۲}=۲$ دارای جواب باشد اعداد گنگ معرفی شدند. آخرین گسترش، مربوط به فراهم کردن جواب‌هایی برای معادلاتی نظیر $x^{۲}+۱=۰$ می‌باشد. این معادله در مجموعه اعداد حقیقی فاقد جواب است؛ زیرا مربع هیچ عدد حقیقی، منفی نمی‌شود. برای معرفی جواب‌هایی برای این نوع معادلات، در قرن شانزدهم میلادی ابتدا $\sqrt{-۱}$ به عنوان یک عدد موهومی مطرح و بعدها با i[1] نمایش داده شد. استفاده از این اعداد مرتب افزایش و به مرور توسط ریاضی‌دانان تکامل بیشتری یافت تا در قرن نوزدهم میلادی آخرین تقریر منظم و علمی برای این اعداد توسط

۱- i از ابتدای کلمه *Imaginary* به معنای موهومی گرفته شده است. در رشته‌های برق به جای i از نماد j استفاده می‌کنند تا با نماد جریان اشتباه نشود. اصطلاح «موهومی» مانند «گنگ» حاکی از عدم اعتمادی بوده است که در ابتدای تعریف این اعداد ابراز شده است.

گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) ریاضی‌دان آلمانی انجام گرفت. او این مجموعه جدید را اعداد مختلط نامید. در این کتاب ضرورتی برای بررسی علمی اعداد مختلط نمی‌باشد و ما تنها به معرفی این اعداد و خواص مقدماتی آنها می‌پردازیم. لازم به توضیح است که مجموعه اعداد مختلط زبان مناسبی برای بیان حرکات ارتعاشی، نوسانات هماهنگ، ارتعاشات میرا، جریان‌های متناوب و دیگر نمودهای موجی می‌باشد.

تعریف ۱: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، هر عبارت به صورت $a+bi$ را یک عدد مختلط می‌نامند. مجموعه این اعداد را مجموعه اعداد مختلط می‌گویند و با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهند[1].

$$\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\,,\ i^۲=-۱\}$$

در عدد مختلط $z=a+bi$، a را قسمت حقیقی و b را قسمت موهومی z نامیده و به ترتیب با $Re\,z$ و $Im\,z$ نمایش می‌دهیم[2]. اگر $b=۰$ عدد مختلط $a+۰\cdot i$ را با عدد حقیقی a برابر می‌گیریم. بنابراین داریم: $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

تعریف ۲: فرض کنید $z=a+bi$ و $w=c+di$ دو عدد مختلط باشند. اگر $z=w$ آنگاه $a=c$ و $b=d$ و بالعکس.

تعریف ۳: اگر k یک عدد حقیقی و $z=a+bi$ و $w=c+di$ دو عدد مختلط باشند اعمال جمع، تفریق و ضرب در مجموعه $\mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$z+w=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$z-w=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

$$zw=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$kz=k(a+bi)=(ka)+(kb)i$$

۱- C از ابتدای کلمه $Complex$ به معنای مختلط گرفته شده است.

۲- Re از ابتدای کلمه $Real$ به معنای حقیقی و Im از ابتدای کلمه $Imaginary$ به معنای موهومی گرفته شده است.

نکته ۱: اعمال جمع و ضرب در مجموعه $\mathbb{C}$ دارای خواص جابه‌جایی و شرکت‌پذیری می‌باشند. هم‌چنین عمل ضرب نسبت به عمل جمع توزیع‌پذیر است. بنابراین کلیه اتحادها در مجموعه اعداد حقیقی، در مجموعه اعداد مختلط نیز برقرار است.

تعریف ۴: اگر $z=a+bi$ یک عدد مختلط باشد، عدد $\bar{z}=a-bi$ را مزدوج z می‌گوییم[1].

نکته ۲: برای عدد مختلط $z=a+bi$ عبارت $z\bar{z}$ یک عدد حقیقی است و داریم:

۱) $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^۲-(bi)^۲=a^۲-b^۲i^۲=a^۲+b^۲$

۲) $z+\bar{z}=۲a$ ۳) $z-\bar{z}=۲bi$ ۴) $(\overline{\bar{z}})=z$

تعریف ۵: اگر $z=a+bi$ و $w=c+di$ دو عدد مختلط و $w\neq۰$، تقسیم دو عدد مختلط را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{z}{w}=\frac{z\bar{w}}{w\bar{w}}=\frac{a+bi}{c+di}\times\frac{c-di}{c-di}=\frac{(ac+bd)-(ad-bc)i}{c^۲+d^۲}=\left(\frac{ac+bd}{c^۲+d^۲}\right)-\left(\frac{ad-bc}{c^۲+d^۲}\right)i$$

تعریف ۶: اگر $z=a+bi$ یک عدد مختلط باشد، قدر مطلق یا اندازه z را با نماد $|z|$ نمایش داده و به صورت $|z|=\sqrt{a^۲+b^۲}$ تعریف می‌کنیم (در چند صفحه بعد تعبیر هندسی این تعریف را مشاهده خواهید کرد).

نکته ۳: برای عدد مختلط z روابط زیر برقرار است.

۱) $|Re\,z|\leq|z|$ ۲) $|Im\,z|\leq|z|$

۳) $|\bar{z}|=|z|=|-z|$ ۴) $|z|^۲=z\,\bar{z}$

۱- عبارت $\bar{z}$ را «z بار» می‌خوانیم. کلمه Bar در زبان انگلیسی معانی مختلفی دارد. یکی از این معانی میله می‌باشد. بعضی هم این عبارت را «z خط» می‌خوانند.

قضیه ۱: برای دو عدد مختلط z و w روابط زیر برقرار است.

۱) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$ ۲) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ ۳) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

۴) $|zw| = |z||w|$ ۵) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq ۰)$ ۶) $|z+w| \leq |z| + |w|$

تذکر: برای انجام اعمال مختلف ریاضی در مجموعه اعداد مختلط با ماشین‌حساب، باید آن را بر روی « *Mode complex* » قرار داده و اعداد مختلط را به صورت $a + bi$ بنویسید.

مثال ۱: عبارت‌های زیر در مجموعه اعداد مختلط محاسبه شده است.

۱) $\sqrt{-۷} = \sqrt{-۱}\,\sqrt{۷} = \sqrt{۷}i$

۲) $\sqrt{-۳}\,\sqrt{-۱۲} = (\sqrt{۳}i)(\sqrt{۱۲}i) = \sqrt{۳۶}i^۲ = -۶$

۳) $(\sqrt{-۵})^۲ = (\sqrt{۵}i)^۲ = (\sqrt{۵})^۲ i^۲ = -۵$

۴) $\sqrt{-۲}(\sqrt{-۶} - \sqrt{-۸}) = (\sqrt{۲}i)(\sqrt{۶}i - \sqrt{۸}i) = \sqrt{۱۲}i^۲ - \sqrt{۱۶}i^۲$

$= -۲\sqrt{۳} - (-۴) = ۴ - ۲\sqrt{۳}$

تذکر: استفاده از قانون $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ فقط در حالتی مجاز می‌باشد که a و b اعداد حقیقی نامنفی باشند. به عنوان نمونه عملیات زیر نادرست می‌باشد.

$\sqrt{-۳}\,\sqrt{-۱۲} = \sqrt{(-۳)(-۱۲)} = \sqrt{۳۶} = ۶$

مثال ۲: برای عدد مختلط $z = ۳ - ۴i$ داریم:

۱) $Re\, z = Re(۳ - ۴i) = ۳$ ۲) $Im\, z = Im(۳ - ۴i) = -۴$

۳) $\bar{z} = ۳ + ۴i$ ۴) $|z| = \sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲} = ۵$

۵) $z\bar{z} = (۳ - ۴i)(۳ + ۴i) = ۳^۲ - (۴i)^۲ = ۹ - ۱۶i^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵$

۶) $\frac{۱}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{۳+۴i}{۲۵} = \frac{۳}{۲۵} + \frac{۴}{۲۵}i$

۷) $z^۲ = (۳ - ۴i)^۲ = ۳^۲ - ۲(۳)(۴i) + (۴i)^۲ = -۷ - ۲۴i$

مثال ۳: برای اعداد مختلط $z = ۲ - ۳i$ و $w = ۳ + ۲i$ داریم:

۱) $z + w = (۲ - ۳i) + (۳ + ۲i) = ۵ - i$

۲) $z - w = (۲ - ۳i) - (۳ + ۲i) = -۱ - ۵i$

۳) $zw = (۲ - ۳i)(۳ + ۲i) = ۶ + ۴i - ۹i - ۶i^۲ = ۱۲ - ۵i$

۴) $z\bar{w} = (۲ - ۳i)(۳ - ۲i) = ۶ - ۴i - ۹i + ۶i^۲ = ۰ - ۱۳i$

۵) $\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{(۲-۳i)(۳-۲i)}{(۳+۲i)(۳-۲i)} = \frac{(۲-۳i)(۳-۲i)}{۳^۲+۲^۲} = \frac{۱}{۱۳}(۰ - ۱۳i) = -i$

تذکر: در محاسبات ضرب و تقسیم دو عدد مختلط مثال قبل می‌توانستیم به کمک فرمول‌های تعریف‌های ۳و۵ ، جواب را سریع‌تر به‌دست آوریم. ولی فرض را بر این گذاشتیم که فرمول‌ها را فراموش کرده‌ایم. هدف از این رفتار، کاهش وابستگی به فرمول‌هایی می‌باشد که احتمال اشتباه در حفظ آنها زیاد است.

مثال ۴: معادلات زیر در مجموعه اعداد مختلط حل شده است.

۱) $x^۲ + ۴ = ۰$

$x^۲ = -۴ \to x = \pm\sqrt{-۴} = \pm ۲\sqrt{-۱} = \pm ۲i$ (دو ریشه مختلط)

۲) $x^۴ - ۱ = ۰$

$(x^۲ - ۱)(x^۲ + ۱) = ۰ \to (x^۲ = ۱ , x^۲ = -۱)$

$\to (x = \pm ۱ \;,\; x = \pm\sqrt{-۱} = \pm i)$ (دو ریشه حقیقی و دو ریشه مختلط)

۳) $x^۲ + ۲x + ۵ = ۰$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۴ - ۲۰ = -۱۶ \to \sqrt{\Delta} = \sqrt{-۱۶} = ۴i$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \to x = \frac{-۲ \pm ۴i}{۲} = -۱ \pm ۲i$ (دو ریشه مختلط)

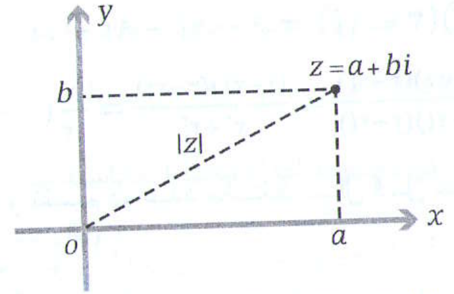
۴) $x^۳ + ۱ = ۰$

$(x + ۱)(x^۲ - x + ۱) = ۰ \to (x + ۱ = ۰ \;,\; x^۲ - x + ۱ = ۰)$

$\to (x = -۱ \;,\; x = \frac{۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}i)$ (یک ریشه حقیقی و دو ریشه مختلط)

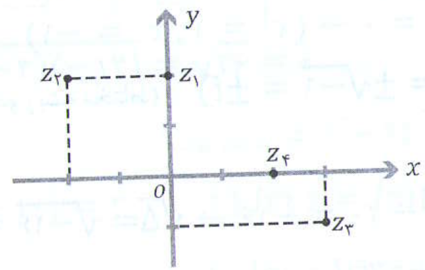
نمایش‌های یک عدد مختلط

۱- نمایش دکارتی یک عدد مختلط: بین مجموعه اعداد مختلط و نقاط صفحه مختصات می‌توان یک تناظر یک‌به‌یک به این صورت برقرار کرد که به هر عدد مختلط $a + bi$ نقطه (a, b) و به هر نقطه مانند (a, b) عدد مختلط $a + bi$ را نسبت دهیم.

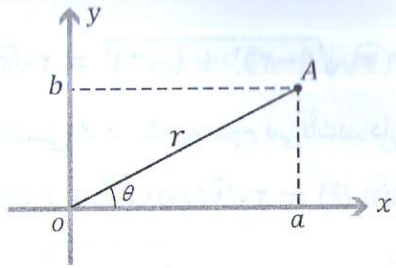


در این حالت محور x ها را محور حقیقی و محور yها را محور موهومی می‌نامند و فاصله نقطه z تا مبدا مختصات برابر $|z| = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$ می‌باشد. نمایش هر عدد مختلط به صورت $a + bi$ را **نمایش دکارتی**، **نمایش مربعی** یا **نمایش استاندارد** می‌گویند. هم‌چنین نمایش هر عدد مختلط بر روی دستگاه مختصات را **نمایش هندسی** آن عدد می‌نامند.

مثال ۵: نمایش هندسی اعداد مختلط $z_۱ = ۲i$ ، $z_۲ = -۲ + ۲i$ ، $z_۳ = ۳ - i$ و $z_۴ = ۲ + ۰i = ۲$ در دستگاه مختصات به صورت زیر می‌باشد.



۲- نمایش قطبی یک عدد مختلط: هرگاه نمایش هندسی عدد مختلط $z = a + bi$ در دستگاه مختصات دکارتی نقطه A باشد، اگر مانند شکل ذیل θ را زاویه‌ای که بردار $\overrightarrow{OA}$ با جهت مثبت محور x ها می‌سازد و $r = |z| = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$ در نظر بگیریم:



داریم:

$$(\sin\theta = \frac{b}{r}, \cos\theta = \frac{a}{r}) \rightarrow (b = r\sin\theta, a = r\cos\theta)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$z = a + bi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

نمایش فوق را **نمایش قطبی** یا **نمایش مثلثاتی** عدد مختلط z می‌گویند. گاهی برای اختصار می‌نویسند: $z = rcis(\theta)$ یا $r\angle\theta$. با فرض $۰ \le \theta < ۲\pi$ ، نمایش قطبی منحصر به فرد خواهد بود. عدد مثبت r را **قدر مطلق** یا **کالبد** می‌گویند، هم‌چنین θ را **شناسه** یا **آرگومان** z می‌نامند و با $Arg(z)$ [1] نمایش می‌دهند و داریم:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \rightarrow \theta = \tan^{-۱}(\frac{b}{a}) = Arg(z)$$

برای مشخص کردن مقدار θ باید به مکان نقطه z در صفحه مختصات توجه کرد.

مثال ۶: نمایش قطبی چند عدد مختلط در زیر ارائه شده است.

۱) $z = i \rightarrow z = ۰ + ۱i \rightarrow r = \sqrt{۰^{۲} + ۱^{۲}} = ۱$

با توجه به اینکه نمایش هندسی نقطه z بر روی محور y ها می‌باشد، داریم: $\theta = \frac{\pi}{۲}$. بنابراین:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\frac{\pi}{۲} + i\sin\frac{\pi}{۲}$$

۲) $z = ۳ + ۳i \rightarrow \left(r = \sqrt{۳^{۲} + ۳^{۲}} = ۳\sqrt{۲}\ ,\ \tan\theta = \frac{۳}{۳} = ۱\right)$

با توجه به اینکه نمایش هندسی z در ناحیه اول می‌باشد، داریم: $\theta = \frac{\pi}{۴}$. بنابراین:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = ۳\sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴})$$

۱- Arg از ابتدای کلمه $Argument$ به معنی شناسه گرفته شده است.

۲) $z = -3 - 3i \rightarrow \left(r = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}\,,\ \tan\theta = \frac{-3}{-3} = 1\right)$

با توجه به اینکه نمایش هندسی z در ناحیه سوم می‌باشد، داریم: $\theta = \frac{5\pi}{4}$. بنابراین:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

قضیه ۲: برای اعداد مختلط $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $w = s(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ روابط زیر برقرار است:

۱) $zw = rs[\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)]$

۲) $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}[\cos(\theta-\alpha) + i\sin(\theta-\alpha)]$

۳) $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad (n\in\mathbb{Z})$ (دستور دموآور[1])

۴) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \quad (n\in\mathbb{N}\,, n\geq 2)$

اگر به جای k اعداد $0, 1, 2, \dots, n-1$ قرار گیرد، n ریشه متمایز عدد z به‌دست می‌آید[2].

مثال ۷: بر اساس قضیه ۲ برای اعداد مختلط $z = 2(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)$ و $w = 6(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)$ عبارات زیر محاسبه شده است.

۱) $zw = (2\times 6)(\cos(50^\circ + 80^\circ) + i\sin(50^\circ + 80^\circ))$

$$= 12(\cos 130^\circ + i\sin 130^\circ)$$

۲) $\frac{w}{z} = \frac{6}{2}(\cos(80^\circ - 50^\circ) + i\sin(80^\circ - 50^\circ)) = 3(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$

۳) $z^3 = 2^3(\cos(3\times 50^\circ) + i\sin(3\times 50^\circ)) = 8(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$

۴) $\frac{1}{w} = w^{-1} = 6^{-1}(\cos(-80^\circ) + i\sin(-80^\circ))$

$$= \frac{1}{6}(\cos 280^\circ + i\sin 280^\circ)$$

۱- دموآور (۱۷۵۴-۱۶۶۷) ریاضی‌دان فرانسوی می‌باشد.

۲- به جای k می‌توان هر n عدد صحیح متوالی دیگری نیز قرار داد.

مثال ۸: برای اینکه عدد $(1 + i\sqrt{3})^5$ را به صورت نمایش دکارتی یک عدد مختلط بنویسیم، ابتدا نمایش قطبی عدد $1 + i\sqrt{3}$ را که نمایش هندسی آن در ناحیه اول قرار دارد را به‌دست می‌آوریم، سپس از دستور دموآور استفاده می‌کنیم.

$$z = 1 + i\sqrt{3} \rightarrow \left(r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}\,,\ \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}\right)$$

$$\rightarrow (r = 2\,, \theta = 60^\circ)$$

$$z = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) \rightarrow z^5 = 32(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$$

$$\rightarrow z^5 = 32(\cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ)) = 32\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16 - 16\sqrt{3}i$$

مثال ۹: ریشه‌های معادله $z^5 = -1$ را در مجموعه اعداد مختلط به‌دست آورید.

حل: جواب‌های این معادله، ریشه‌های پنجم عدد -1 می‌باشند. لذا ابتدا عدد -1 را به صورت قطبی نمایش می‌دهیم، سپس از قسمت چهارم قضیه ۲ استفاده می‌کنیم.

$$z = -1 = -1 + 0\cdot i \rightarrow \left(r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2}\ ,\ \tan\theta = \frac{0}{-1} = 0\right)$$

$$\rightarrow (r = 1\,, \theta = \pi) \rightarrow z = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$\rightarrow \sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)\right)\ ,\ k = 0,1,2,3,4$$

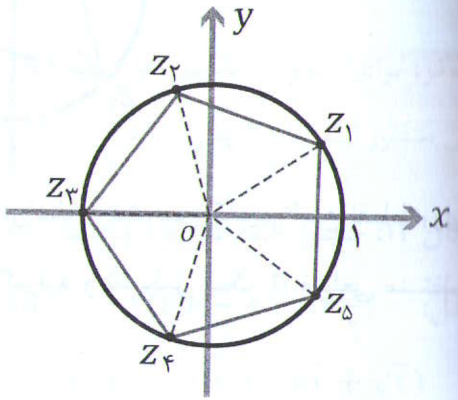
$k = 0 \rightarrow z_1 = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$

$k = 1 \rightarrow z_2 = \cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}$

$k = 2 \rightarrow z_3 = \cos\pi + i\sin\pi$

$k = 3 \rightarrow z_4 = \cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}$

$k = 4 \rightarrow z_5 = \cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}$



مثال ۱۰: ریشه‌های سوم عدد $\sqrt{۳}i - ۱$ را به‌دست آورید.

حل: ابتدا عدد $\sqrt{۳}i - ۱$ را که نمایش هندسی آن در ناحیه چهارم قرار دارد را به صورت قطبی می‌نویسیم:

$$r = \sqrt{(۱)^۲ + (-\sqrt{۳})^۲} = ۲$$

$$\tan\theta = \frac{-\sqrt{۳}}{۱} = -\sqrt{۳} \to \theta = ۳۰۰^\circ = \frac{۵\pi}{۳}$$

$$\to ۱ - \sqrt{۳}i = ۲(\cos\frac{۵\pi}{۳} + i\sin\frac{۵\pi}{۳})$$

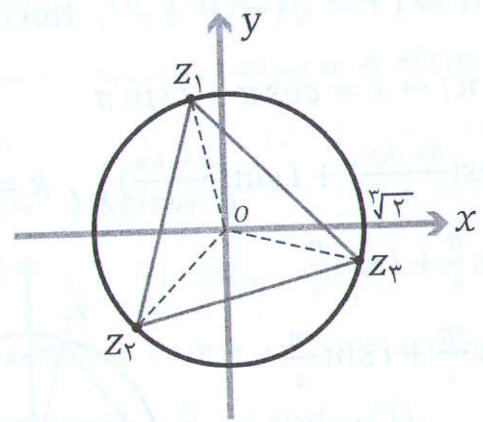
اکنون از قسمت چهارم قضیه ۲ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{۱ - \sqrt{۳}i} = \sqrt[۳]{۲}\left(\cos(\frac{\frac{۵\pi}{۳}+۲k\pi}{۳}) + i\sin(\frac{\frac{۵\pi}{۳}+۲k\pi}{۳})\right) \ , \ k = ۰,۱,۲$$

$$k = ۰ \to z_۱ = \sqrt[۳]{۲}(\cos ۱۰۰^\circ + i\sin ۱۰۰^\circ)$$

$$k = ۱ \to z_۲ = \sqrt[۳]{۲}(\cos ۲۲۰^\circ + i\sin ۲۲۰^\circ)$$

$$k = ۲ \to z_۳ = \sqrt[۳]{۲}(\cos ۳۴۰^\circ + i\sin ۳۴۰^\circ)$$



نکته ۴: اگر ریشه‌های nام عدد مختلط z را در صفحه مشخص کنیم، این نقاط روی دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع $\sqrt[n]{r}$ قرار می‌گیرند و تشکیل یک n ضلعی منتظم می‌دهند.

۴- نمایش نمایی یک عدد مختلط: اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) ریاضی‌دان سویسی به کمک سری‌های سه تابع e^x ، $\sin x$ و $\cos x$ ثابت کرد: $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ بنابراین عدد $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ را می‌توان به صورت $z = re^{i\theta}$ نمایش داد. این نوع نمایش را، **نمایش نمایی** عدد مختلط می‌نامند.

تذکر: برای ضرب، تقسیم و به توان رساندن اعداد مختلط، اگر اعداد را به شکل نمایی یا قطبی بنویسیم، حاصل بسیار ساده‌تر محاسبه می‌شود.

مثال ۱۱: اعمال زیر برای دو عدد مختلط $z = ۲cis(\frac{\pi}{۳})$ و $w = ۴cis(\frac{\pi}{۴})$ به کمک نمایش نمایی انجام شده است.

۱) $zw = (۲e^{\frac{\pi}{۳}i})(۴e^{\frac{\pi}{۴}i}) = (۲ \times ۴)e^{(\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴})i} = ۸e^{\frac{۷\pi}{۱۲}i}$

۲) $\frac{z}{w} = \frac{۲e^{\frac{\pi}{۳}i}}{۴e^{\frac{\pi}{۴}i}} = \frac{۲}{۴}e^{(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴})i} = \frac{۱}{۲}e^{\frac{\pi}{۱۲}i}$

۳) $z^۳ = (۲e^{\frac{\pi}{۳}i})^۳ = (۲)^۳(e^{\frac{\pi}{۳}i})^۳ = ۸e^{\pi i}$

۴) $\frac{۱}{w} = w^{-۱} = (۴e^{\frac{\pi}{۴}i})^{-۱} = (۴^{-۱})e^{-\frac{\pi}{۴}i} = \frac{۱}{۴}e^{-\frac{\pi}{۴}i} = \frac{۱}{۴}e^{\frac{۷\pi}{۴}i}$

۵) $Ln\, z = Ln(۲e^{\frac{\pi}{۳}i}) = Ln\, ۲ + Ln(e^{\frac{\pi}{۳}i})$

$= Ln\, ۲ + \frac{\pi}{۳}i\, Ln\, e = Ln\, ۲ + \frac{\pi}{۳}i$

تذکر: برای جمع یا تفریق اعداد مختلط، نمایش نمایی و قطبی مفید نمی‌باشد، برای این منظور ابتدا باید آنها را به شکل دکارتی تبدیل کنیم، سپس حاصل را به‌دست آوریم.

مثال ۱۲: حاصل جمع دو عدد مختلط $z = ۲e^{\frac{\pi}{۳}i}$ و $w = ۴e^{\frac{\pi}{۴}i}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$w + z = ۴e^{\frac{\pi}{۴}i} + ۲e^{\frac{\pi}{۳}i} = ۴(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}) + ۲(\cos\frac{\pi}{۳} + i\sin\frac{\pi}{۳})$$

$$= ۴\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) + ۲\left(\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = (۲\sqrt{۲} + ۱) + i(۲\sqrt{۲} + \sqrt{۳})$$

نتیجه: بین سه نمایش مختلف عدد مختلط z ، روابط زیر برقرار است:

$$z = a + ib \quad \text{(نمایش دکارتی)}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{(نمایش قطبی)}$$

$$= \sqrt{a^۲ + b^۲}\left[\cos(\tan^{-۱}\frac{b}{a}) + i\sin(\tan^{-۱}\frac{b}{a})\right]$$

$$z = r\,e^{i\theta} = \sqrt{a^۲ + b^۲}\,e^{i\tan^{-۱}(\frac{b}{a})} \quad \text{(نمایش نمایی)}$$

$\tan^{-۱}(\frac{b}{a})$ را با توجه به ناحیه‌ای که نمایش هندسی $a + ib$ در آن است، محاسبه می‌کنیم.

نکته ۵: آنچه اویلر اثبات کرد در نظر اول برای هر کسی عجیب به نظر می‌رسد و از خود سوال می‌کند چه ارتباطی بین عدد e ، اعداد مختلط و توابع مثلثاتی وجود دارد که منجر به پدید آمدن این فرمول شده است. مشاهده روند کلی اثبات زیرکانه اویلر به عنوان آخرین مطلب این بخش، می‌تواند آموزنده باشد.

در بخش ۴-۶ نشان دادیم که توابع e^x ، $\sin x$ و $\cos x$ را به صورت سری‌های نامتناهی زیر می‌توان نوشت.

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!} + \frac{x^۵}{۵!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots$$

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + \cdots$$

هم‌چنین با توجه به تعریف عدد i داریم:

$$i^۲ = -۱\ ,\ i^۳ = -i\ ,\ i^۴ = ۱\ ,\ i^۵ = i\ ,\ i^۶ = -۱\ ,\cdots$$

ثابت می‌شود که می‌توان نوشت:

$$e^{i\theta} = ۱ + (i\theta) + \frac{(i\theta)^۲}{۲!} + \frac{(i\theta)^۳}{۳!} + \frac{(i\theta)^۴}{۴!} + \frac{(i\theta)^۵}{۵!} + \cdots$$

$$= ۱ + i\theta - \frac{\theta^۲}{۲!} - i\frac{\theta^۳}{۳!} + \frac{\theta^۴}{۴!} + i\frac{\theta^۵}{۵!} - \cdots$$

$$= (۱ - \frac{\theta^۲}{۲!} + \frac{\theta^۴}{۴!} - \cdots) + i(\theta - \frac{\theta^۳}{۳!} + \frac{\theta^۵}{۵!} - \cdots)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

تمرین

۱- با فرض $z = ۵ - ۲i$ و $w = ۳ - ۲i$ حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط به شکل دکارتی بنویسید.

۱) $z + w$ ۲) $\bar{z} - w$

۳) $\bar{z}w$ ۴) zw

۵) $\frac{z}{w}$ ۶) $\frac{w}{z}$

۷) $z^۲$ ۸) $w^۳$

۹) $\frac{۱}{z} + \frac{۱}{w}$ ۱۰) $z + \frac{۱}{w}$

۲- اعداد مختلط زیر را به شکل قطبی و نمایی بنویسید.

۱) $-i$ ۲) -۱

۳) $۲ - ۲i$ ۴) $-۲ - ۲i$

۵) $\sqrt{۳} - i$ ۶) $-\sqrt{۳} + i$

۳- اعداد مختلط زیر را به شکل دکارتی بنویسید.

۱) $۳\ cis(۱۳۵^\circ)$ ۲) $۴\ cis(۲۴۰^\circ)$

۳) $۲e^{\pi i}$ ۴) $۳e^{\frac{۳\pi}{۲}i}$

۵) $۲\angle ۱۵۰^\circ$ ۶) $۵\angle ۱۲۰^\circ$

۴- حاصل اعمال زیر را به صورت یک عدد مختلط بنویسید.

۱) $۱ + i^۲ + i^۳ + i^۴ + i^۵$ ۲) $۱ - i^۲ + i^۳ + i^۴ - i^۵$

۳) $۲\ cis(۳۰^\circ) + ۳\ cis(۱۲۰^\circ)$ ۴) $e^{\frac{۳\pi}{۲}i} + ۵e^{\frac{۴\pi}{۳}i} - ۲e^{\pi i}$

۵) $(۲\angle ۶۰^\circ)(۳\angle ۳۰^\circ)$ ۶) $(۸\angle ۴۰^\circ) \div (۲\angle ۱۰^\circ)$

۷) $(۱ - i)^۶$ ۸) $(۱ + i)^۸$

۹) $(۱ + \sqrt{۳}i)^{۱۰}$ ۱۰) $(\sqrt{۳} - i)^{۱۲}$

۱۱) $(\frac{۱-i}{۱+\sqrt{۳}i})^{۴}$ ۱۲) $(\frac{۱-i}{۱+i})^{۶}$

۱۳) $(cis\ ۸^{\circ})^{۱۰} \div (cis\ ۵^{\circ})^{۴}$ ۱۴) $(\sqrt{۲}\ cis\ ۷۵^{\circ})^{۴}\ (۲\ cis\ ۳۶^{\circ})^{۵}$

۵- با فرض $z = ۲e^{\frac{\pi}{۴}i}$ و $w = ۳e^{\frac{\pi}{۱۲}i}$ حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) wz ۲) $\frac{۲w}{۳z}$

۳) $w^{۲}z^{۲}$ ۴) $z^{۴}w^{۳}$

۵) $Ln\, z$ ۶) $Ln\, w$

۶- معادلات زیر را در مجموعه اعداد مختلط حل کنید.

۱) $x^{۲} - ۲x + ۲ = ۰$ ۲) $x^{۲} + ۴x + ۵ = ۰$

۳) $x^{۲} + ۲ix + ۳ = ۰$ ۴) $x^{۲} + (۲ + i)x + i = ۰$

۵) $x^{۳} - ۲۷ = ۰$ ۶) $x^{۳} + ۸ = ۰$

۷) $x^{۳} + x^{۲} + ۸x - ۱۰ =$ ۸) $x^{۳} + ۲x^{۲} + ۴x + ۸ = ۰$

۹) $x^{۴} + ۲x^{۲} - ۳ = ۰$ ۱۰) $x^{۴} + ۴x^{۲} + ۳ = ۰$

۷- ریشه‌های nام عدد داده شده را بیابید.

۱) i , $n = ۲$ ۲) -۸ , $n = ۳$

۳) $۱ + i$, $n = ۴$ ۴) $۱ - i$, $n = ۴$

۵) -۳۲ , $n = ۵$ ۶) $۱ - \sqrt{۳}i$, $n = ۴$

۷) $-۱ - \sqrt{۳}i$, $n = ۶$ ۸) i , $n = ۶$

فصل هشتم

پاسخ کوتاه تمرین‌ها

فصل یکم: تـــابــــع

تمرین‌های صفحه ۱۴ :

۱/۱) $f = \{(۴,۱), (۵,۲), (۶,۳), \cdots\}$, $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq ۴\}$

۱/۲) $f = \{(-۱,۱), (-۴,۲), (-۹,۳), \cdots\}$, $D_f = \{-x^{۲} \mid x \in \mathbb{N}\}$

۱/۳) $f = \left\{(۰,\frac{۱}{۴}), (۱,۰), (-۱,\frac{۲}{۳}), \cdots\right\}$, $D_f = \mathbb{Z} - \{\pm ۲\}$

۱/۴) $f = \left\{(۰,۱), (۱,۰), (-۱,\frac{۲}{۳}), \cdots\right\}$, $D_f = \mathbb{Z} - \left\{\frac{۱}{۲}\right\} = \mathbb{Z}$

۲/۱) $\mathbb{R} - \left\{\frac{۳}{۲}\right\}$ ۲/۲) $\mathbb{R}$

۲/۳) $(-\infty, ۰] \cup [۳, +\infty)$ ۲/۴) $[۳, +\infty) - \{۵\}$

۲/۵) $\emptyset$ ۲/۶) $(-\infty, -۲) \cup [۰, ۲)$

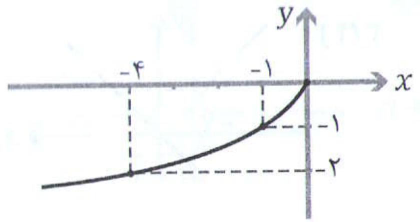
۲/۷) $(-\infty, -۳) \cup (۳, +\infty)$ ۲/۸) $[-۱, +\infty) - \{۰\}$

۲/۹) $\mathbb{R} - \{۰, ۱\}$ ۲/۱۰) $[-۲, ۲]$

۲/۱۱) $(-\infty, -۲] \cup [۴, +\infty)$ ۲/۱۲) $\mathbb{R} - \{-۲, ۳\}$

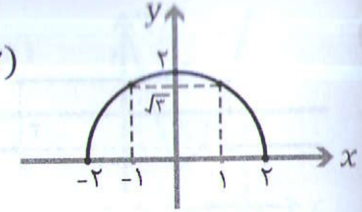
۲/۱۳) $\mathbb{R} - \{\pm ۳\}$ ۲/۱۴) $[-۱, ۲) \cup (۲, +\infty)$

۱/۶)



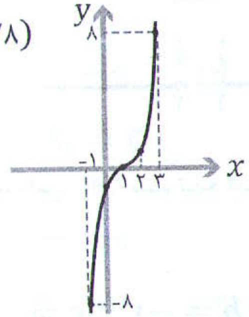
$R_f = (-\infty, ۰]$

۱/۷)



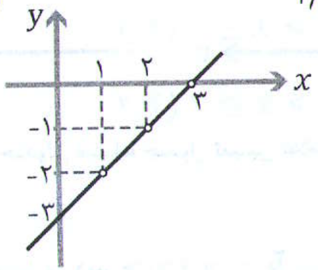
$R_f = [۰,۲]$

۱/۸)



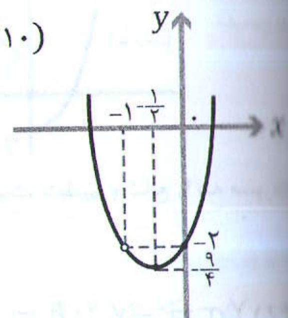
$R_f = \mathbb{R}$

۱/۹)



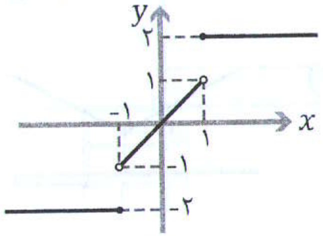
$R_f = \mathbb{R} - \{۰,-۱,-۲\}$

۱/۱۰)

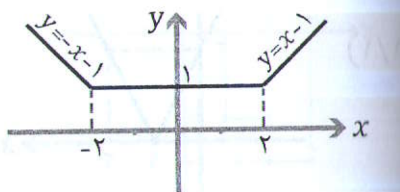


$R_f = [\frac{-۹}{۴}, +\infty)$

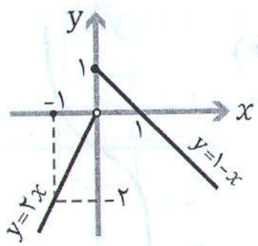
۲/۱)



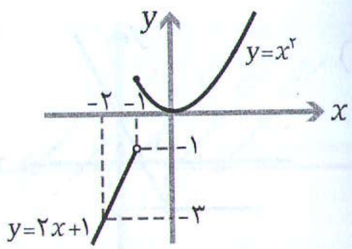
۲/۲)



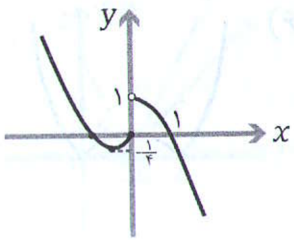
۲/۳)



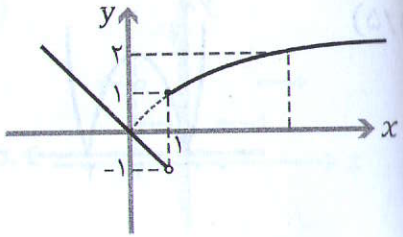
۲/۴)



۲/۵)



۲/۶)



۲/۱۵) $(-۱,۱)$

۲/۱۶) $\{x \mid x \neq ۲k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$

۲/۱۷) $\left\{x \mid x \neq ۲k\pi - \frac{\pi}{۶}\ ,\ x \neq ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

۲/۱۸) $\left\{x \mid x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{۴}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

۳/۱) دو تابع f و g نامساویند، زیرا: $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f \neq \mathbb{R}$، چون $f(۰)$ تعریف نمی‌شود.

۳/۲) دو تابع f و g نامساویند، زیرا: $D_g = \mathbb{R} - \{۰,\pm۲\}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{\pm۲\}$

۳/۳) دو تابع f و g مساویند، زیرا: $D_f = D_g = \mathbb{R}$ و $f(x) = g(x) = |x-۲|$

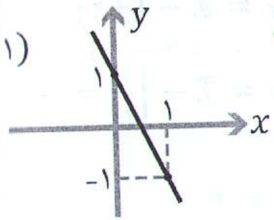
۳/۴) دو تابع f و g مساویند، زیرا: $D_f = D_g = \mathbb{R}$ و $f(x) = g(x) = \cos^۲ x$

۳/۵) دو تابع f و g نامساویند، زیرا: $D_g = (-\infty,-۱]\cup[۰,+\infty)$ و $D_f = [۰,+\infty)$

۳/۶) دو تابع f و g مساویند، زیرا: $D_f = D_g = [۰,+\infty)$ و $f(x) = g(x) = \sqrt[۶]{x^۵}$

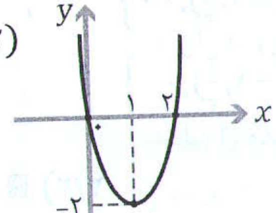
تمرین‌های صفحه ۲۲ :

۱/۱)



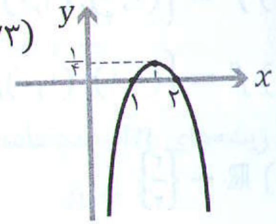
$R_f = \mathbb{R}$

۱/۲)



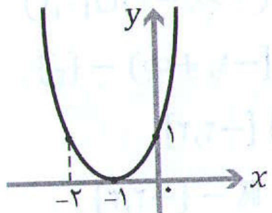
$R_f = [-۲, +\infty)$

۱/۳)



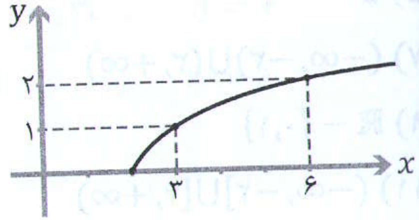
$R_f = (-\infty, \frac{۱}{۴}]$

۱/۴)

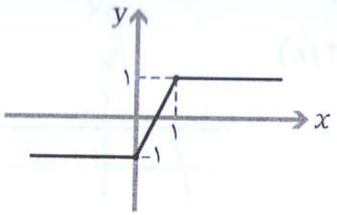


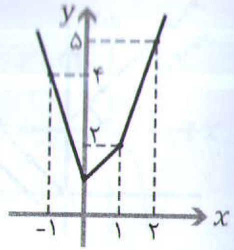
$R_f = [۰,+\infty)$

۱/۵)



$R_f = [۰,+\infty)$

۱/۷)


۱/۸)


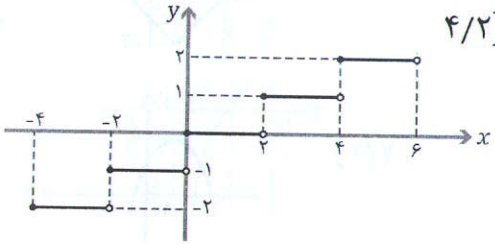
راهنمایی: برای رسم توابع تمرین‌های ۱/۷ و ۱/۸ ، به کمک جدول تعیین علامت تابع را به صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

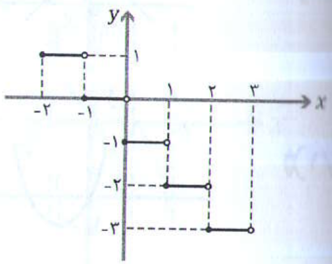
۲/۱) $۲ \leq x < ۲/۵$ ‏ ‏ ‏ ۲/۲) $۱ \leq x < ۳$

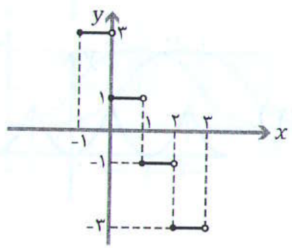
۲/۳) $M = \emptyset$ ‏ ‏ ‏ ۲/۴) $۲ \leq x < ۳$

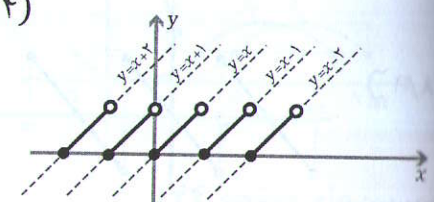
۲/۵) $-۱ < x < ۱$ ‏ ‏ ‏ ۲/۶) $۱ \leq x < ۲$ یا $-۱ \leq x < ۰$

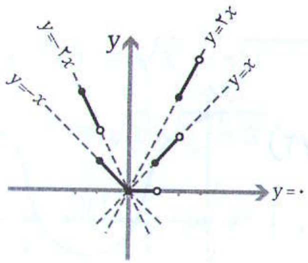
۳/۱) $x \geq ۲$ ‏ ‏ ۳/۲) $x \geq -۱$ ‏ ‏ ۳/۳) $x < ۶$ ‏ ‏ ۳/۴) $x < -۵$

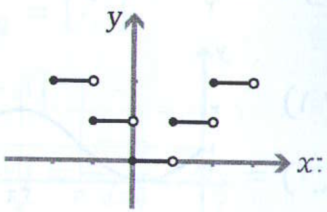
۴/۱)


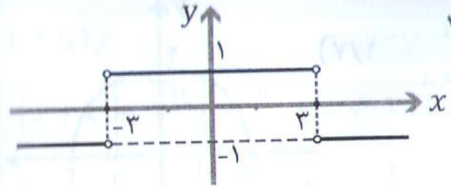
۴/۲)


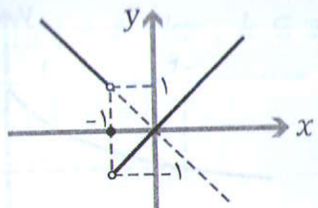
۴/۳)


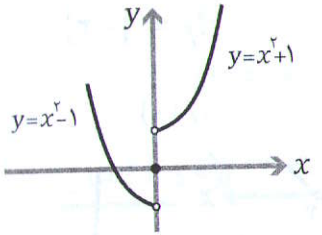
۴/۴)


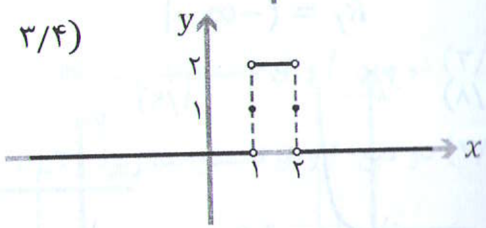
۴/۵)


۴/۶)


۴/۱)


۳/۲)


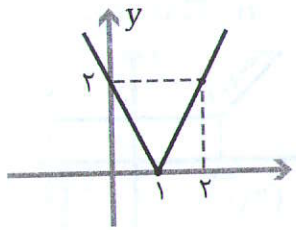
۴/۳)


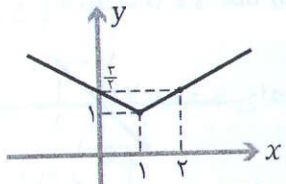
۳/۴)


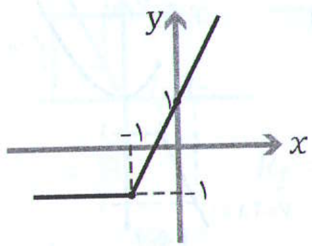
راهنمایی: برای رسم تابع تمرین ۳/۴ جدولی مشابه جدول تعیین علامت، تنظیم و تابع را به صورت چند ضابطه‌ای بنویسید.

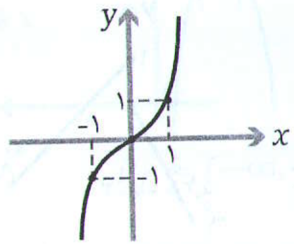
۴/۱) $a = -۷\ ,\ b = -\frac{۳}{۲}$ ‏ ‏ ‏ ۴/۲) $a = -۲\ ,\ b = -۳\ ,\ c = ۱$

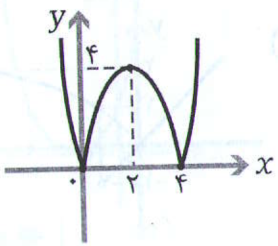
تمرین‌های صفحه ۳۴ :

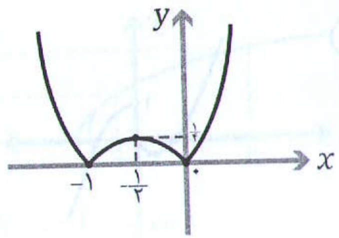
۱/۱)


۱/۲)


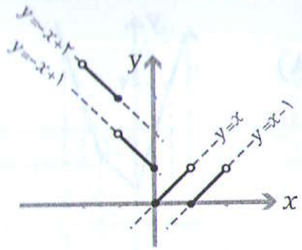
۱/۳)


۱/۴)


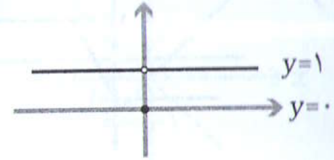
۱/۵)


۱/۶)


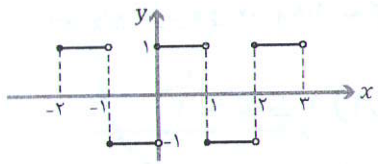
۴/۷)



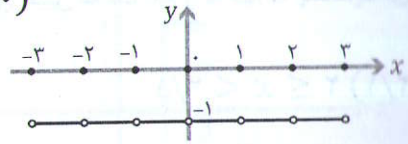
۴/۸)



۴/۹)



۴/۱۰)



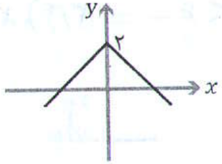
۵/۱) $(-\infty,-۱)\cup[۰,+\infty)$

۵/۲) $\mathbb{R}$

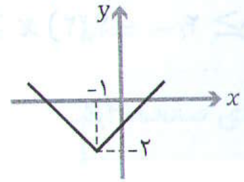
۵/۳) $[۳,+\infty)$

۵/۴) $(-\infty,۵)$

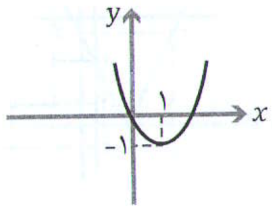
۶/۱)



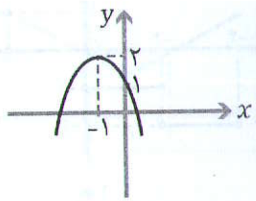
۶/۲)



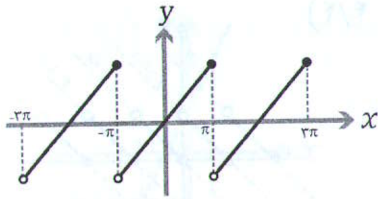
۷/۱)



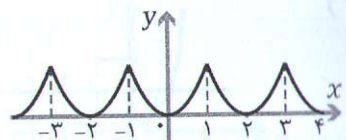
۷/۲)



۸/۱)

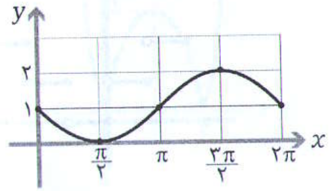


۸/۲)

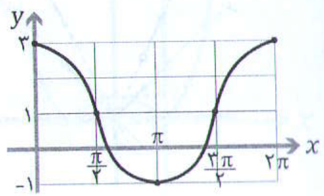


۹/۱) $T=\frac{\pi}{۲}$ ۹/۲) $T=\frac{\pi}{۲}$

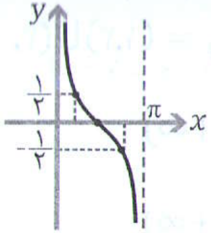
۱۰/۱)



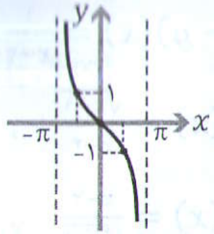
۱۰/۲)



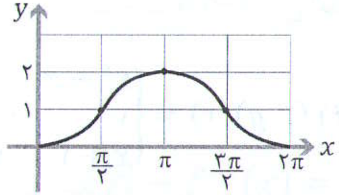
۱۰/۳)



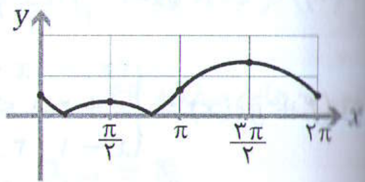
۱۰/۴)



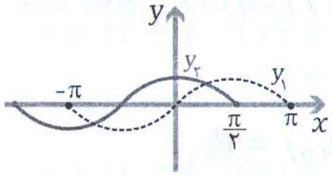
۱۰/۵)



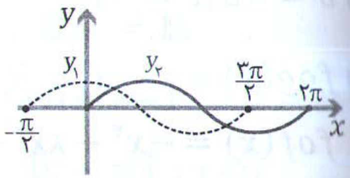
۱۰/۶)



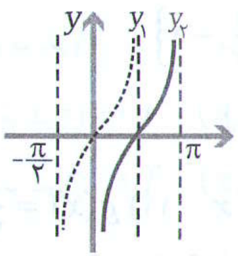
۱۱/۱)



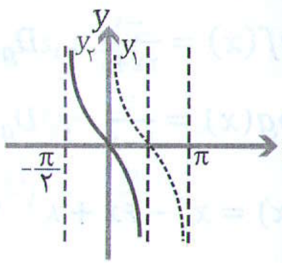
۱۱/۲)



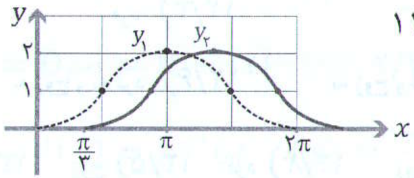
۱۱/۳)



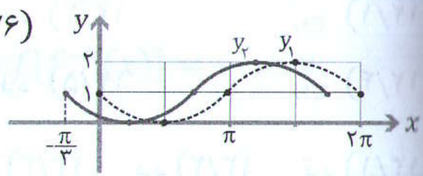
۱۱/۴)



۱۱/۵)



۱۱/۶)



تمرین‌های صفحه ۴۴ :

۱) $(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{۱-x}$, $D_{f+g}=[۰,۱]$

$(f.g)(x)=\sqrt{x}\sqrt{۱-x}$, $D_{f.g}=[۰,۱]$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{۱-x}}$, $D_{\frac{f}{g}}=[۰,۱)$, $(\frac{g}{f})(x)=\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{x}}$, $D_{\frac{g}{f}}=(۰,۱]$

۲) $(f-g)(x)=\frac{۱}{x-۳}-\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$, $D_{f-g}=(۱,۳)\cup(۳,+\infty)$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۳}$, $D_{\frac{f}{g}}=(۱,۳)\cup(۳,+\infty)$

$(\frac{g}{f})(x)=\frac{x-۳}{\sqrt{x-۱}}$, $D_{\frac{g}{f}}=(۱,۳)\cup(۳,+\infty)$

۳) $(f+g)(x)=\begin{cases}۳x & x<۱\\ x+۲ & ۱\le x<۳\\ x-۱ & ۳\le x\end{cases}$ ۴) $(f.g)(x)=\begin{cases}x^۲-x & x\le ۱\\ ۱ & ۱<x\le ۲\\ x+۱ & ۲<x\end{cases}$

۵) $b=-۵\,,c=-۳$ ۶) $fog(x)-gof(x)=-۴$

۷) $fog(x)=۴-x$, $D_{fog}=[۰,+\infty)$

$fof(x)=-x^۴+۸x^۲-۱۲$, $D_{fof}=\mathbb{R}$

۸) $gof(x)=\frac{-۱}{۲x+۱}$, $D_{gof}=\mathbb{R}-\{-\frac{۱}{۲},-۱\}$

$gog(x)=\frac{x}{۴-x}$, $D_{gog}=\mathbb{R}-\{۲,۴\}$

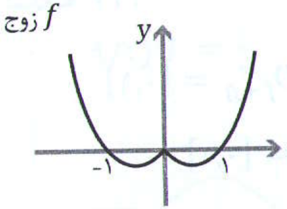
۹) $f(x)=x^۲-۶x+۸$ ۱۰) $f(x)=۱-x$ ۱۱) $g(x)=\frac{۱}{۲}x^۲+x+۱$

۱۲/۱) زوج ۱۲/۲) فرد ۱۲/۳) فرد

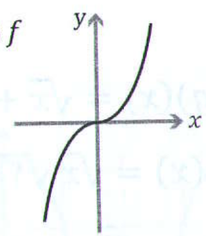
۱۲/۴) زوج ۱۲/۵) نه زوج و نه فرد ۱۲/۶) نه زوج و نه فرد

۱۳/۱) فرد ۱۳/۲) فرد ۱۳/۳) زوج ۱۳/۴) فرد ۱۳/۵) زوج ۱۳/۶) زوج

۱۴/۱) f زوج است

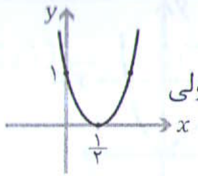


۱۴/۲) f فرد است

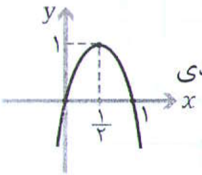


۱۵/۱) اکیداً نزولی ۱۵/۲) اکیداً صعودی ۱۵/۳) اکیداً صعودی ۱۵/۴) اکیداً نزولی

۱۶/۱) در فاصله $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ اکیداً صعودی و در فاصله $(-\infty,\frac{۱}{۲}]$ اکیداً نزولی



۱۶/۲) در فاصله $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ اکیداً نزولی و در فاصله $(-\infty,\frac{۱}{۲}]$ اکیداً صعودی



تمرین‌های صفحه ۴۹ :

۱/۱) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۵}(x+۳)$, $D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$

۱/۲) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x)=۴-\sqrt[۳]{x}$, $D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$

۱/۳) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x)=x^۲$, $D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$

۱/۴) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x}+۱$, $D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$

۱/۵) (f یک به یک نیست) ۱/۶) (f یک به یک نیست)

۱/۷) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{۹-x^۲}$, $D_{f^{-۱}}=[۰,۳)$

۱/۸) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x)=x^۳-۲$, $D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$

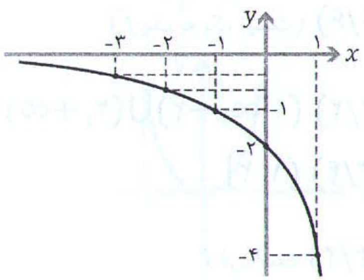
۲/۱) f یک به یک است ۲/۲) $f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲-x}$ (عملیات ۲/۱ و ۲/۲ مشابه مثال ۳ صفحه ۴۸)

۲/۳) $R_f=D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}-\{۲\}$ ۲/۴) $f[f^{-۱}(x)]=\cdots=x$

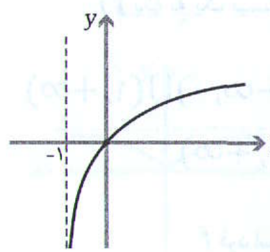
۳) $(fog)^{-۱}(x)=g^{-۱}of^{-۱}(x)=\frac{۷-x}{۴}$

تمرین‌های صفحه ۵۶ :

۱/۱)



۱/۲)



۵/۱) درست　۵/۲) درست　۵/۳) درست　۵/۴) درست　۵/۵) درست　۵/۶) درست

تمرین‌های صفحه ۶۲ :

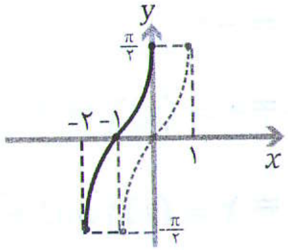
۱/۱) $\cdot , \frac{\pi}{۶} , \frac{-\pi}{۳}$　　۱/۲) $\frac{۲\pi}{۳} , \cdot , \frac{\pi}{۶}$

۱/۳) $\frac{-\pi}{۴} , \frac{\pi}{۶} , \cdot$　　۱/۴) $\frac{\pi}{۴} , \frac{۲\pi}{۳} , \frac{\pi}{۲}$

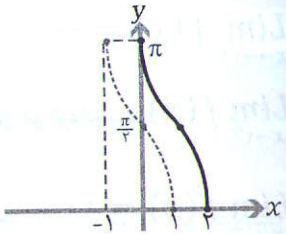
۲/۱) $[۱,۲]$　　۲/۲) $[-۳,۱]$　　۲/۳) $(-\infty,-۲]\cup[\cdot,+\infty)$

۲/۴) $[-\frac{۱}{۲},+\infty)$　　۲/۵) $\mathbb{R}$　　۲/۶) $\mathbb{R}$　　۲/۷) $[\cdot,۱]$　　۲/۸) $[۲,+\infty)$

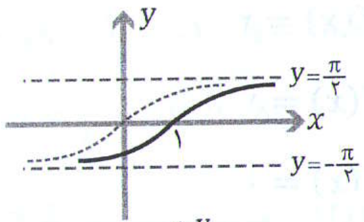
۳/۱)



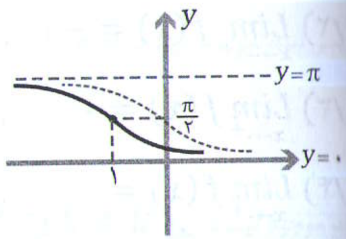
۳/۲)



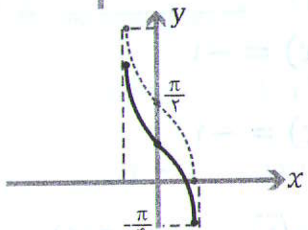
۳/۳)



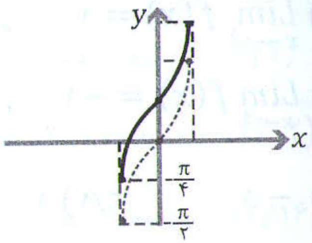
۳/۴)



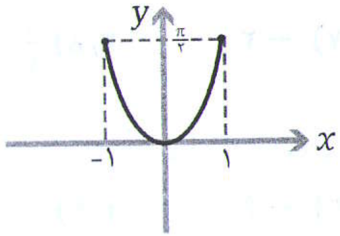
۳/۵)



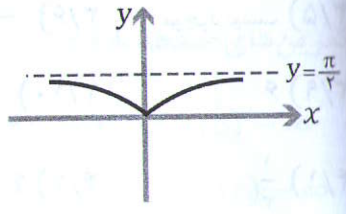
۳/۶)



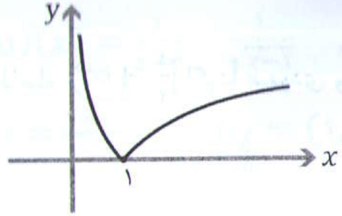
۴/۱)



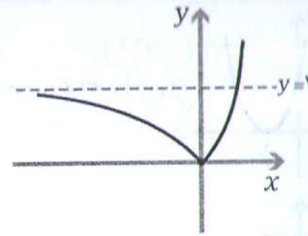
۴/۲)



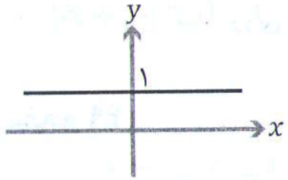
۱/۳)



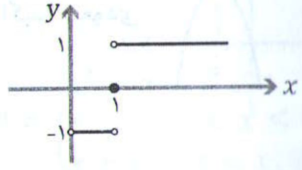
۱/۴)



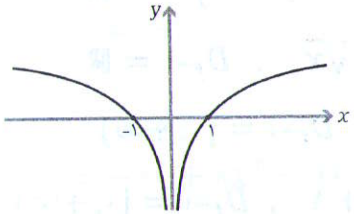
۱/۵)



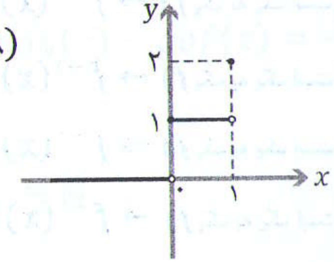
۱/۶)



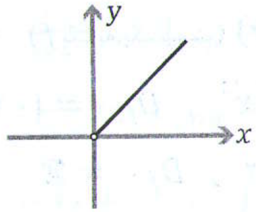
۱/۷)



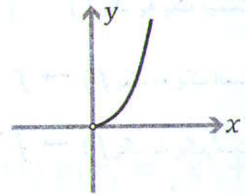
۱/۸)



۱/۹)



۱/۱۰)



۲/۱) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۳}[(Log_۲ x) - ۱]$

۲/۲) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x) = -Ln(x+۱)$

۲/۳) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x) = e^{x-۲}$

۲/۴) (f یک به یک است) $\rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{۲^x} - ۲$

۲/۵) (f یک به یک نیست)　　۲/۶) (f یک به یک نیست)

۳/۱) $(-\infty,\cdot)\cup(۱,+\infty)$　　۳/۲) $(-\infty,-۲)\cup(۲,+\infty)$

۳/۳) $[۱,+\infty)$　　۳/۴) $(۱,۲]$

۴/۱) f فرد است　　۴/۲) f فرد است

فصل دوم: حد و پیوستگی

تمرین‌های صفحه ۷۸ :

۱/۱) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = ۱$, $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = ۱$

۱/۲) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = ۱$, $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = -۱$

۱/۳) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = ۱$, $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = -۱$

۱/۴) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۰$, $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۰$

۱/۵) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) = -۱$, $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x) = -۱$

۱/۶) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ موجود نیست , $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = ۰$

۲/۱) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۱$, $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۱$

۲/۲) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) = -۱$, $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x) = ۲$

۲/۳) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۰$, $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۱$

۲/۴) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۰$, $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۰$

۲/۵) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) = ۱$, $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x) = -۱$

۲/۶) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = -۱$, $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = -۱$

۳/۱) -۱ ۳/۲) ۱ ۳/۳) $\sqrt{۱۰}$ ۳/۴) موجود نیست

۳/۵) موجود نیست ۳/۶) -۱ ۳/۷) -۲ ۳/۸) $\frac{۱}{۲}$

۳/۹) ۶ ۳/۱۰) ۰

۴/۱) $\frac{۱}{۳}$ ۴/۲) ۴ ۴/۳) -۴ ۴/۴) -۱۵

۴/۵) ۲ ۴/۶) $-\frac{۱}{۴}$ ۴/۷) $\frac{۱}{۴}$ ۴/۸) $\frac{۲}{۳}$

۴/۹) $\frac{۱۷}{۱۲}$ ۴/۱۰) $\sqrt{\frac{۶}{۵}}$ ۴/۱۱) ۱۲ ۴/۱۲) $\frac{۱}{۲a^۲}$

۵/۱) $\frac{۳}{۵}$ ۵/۲) ۴ ۵/۳) $\frac{۱}{۲}$ ۵/۴) $\frac{۷}{۳}$

۵/۵) $\frac{۱}{۵}$ ۵/۶) ۶ ۵/۷) $-\pi$ ۵/۸) -۱

۵/۹) ۰ (به کمک قضیه فشردگی) ۵/۱۰) ۰ (به کمک قضیه فشردگی)

۶) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۲$ (به کمک قضیه فشردگی)

۷) $\xrightarrow{\text{به کمک قضیه فشردگی}} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = -۱ \to \lim\limits_{x\to ۱^+} (۲f(x)+۵) = ۳$

۸) $\xrightarrow{\text{به کمک قضیه فشردگی}} \lim\limits_{x\to ۳} f(x) = ۴ \to \lim\limits_{x\to ۳} \sqrt{f(x)} = ۲$ (عملیات مشابه مثال ۲۰ صفحه ۷۵)

۹) $a = \frac{۲۷}{۲۸}$ و $b = \frac{۲}{۷}$ ۱۰) $۱۰a - ۶b = ۱$ (یعنی تعداد نامتناهی زوج مرتب (a,b) می‌توان معرفی کرد)

۱۱) $a = b = \frac{۱}{۳}$ ۱۲/۱) ۵ ۱۲/۲) ۱۱

۱۳/۱) حد موجود نیست زیرا: $L \neq L'$ ۱۳/۲) $\frac{۱}{۶}$ ۱۳/۳) حد موجود نیست زیرا: $L \neq L'$

۱۳/۴) ۰ ۱۳/۵) ۰ ۱۳/۶) با توجه به دامنه، حد موجود نیست ۱۳/۷) -۲

۱۳/۸) ۰ ۱۳/۹) -۱ ۱۳/۱۰) -۱ ۱۳/۱۱) ۰ ۱۳/۱۲) ۳

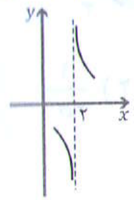
۱۳/۱۳) $\frac{۱}{۲}$ ۱۳/۱۴) ۰ ۱۳/۱۵) حد موجود نیست زیرا: $L \neq L'$ ۱۳/۱۶) ۱

تمرین‌های صفحه ۸۸ :

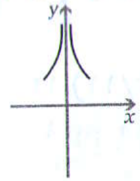
۱/۱) $-\infty$ ۱/۲) $+\infty$ ۱/۳) $-\infty$ ۱/۴) $-\infty$ ۱/۵) $-\infty$

۱/۶) $-\infty$ ۱/۷) $+\infty$ ۱/۸) $+\infty$ ۱/۹) $-\infty$ ۱/۱۰) $-\infty$

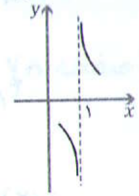
$۲/۱)\ x = ۲$



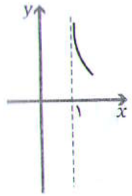
$۲/۲)\ x = ۰$



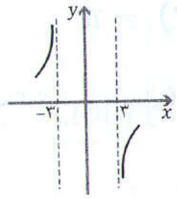
$۲/۳)\ x = ۱$



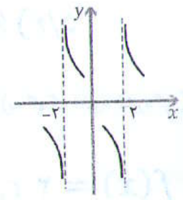
$۲/۴)\ x = ۱$



$۲/۵)\ x = ۳$ و $x = -۳$

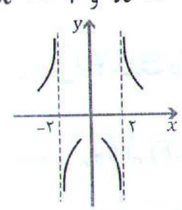


$۲/۶)\ x = ۲$ و $x = -۲$

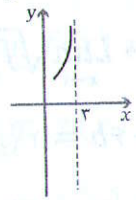


۲/۷) مجانب قائم ندارد ۲/۸) مجانب قائم ندارد ۲/۹) مجانب قائم ندارد ۲/۱۰) مجانب قائم ندارد

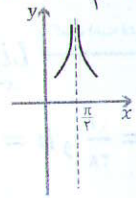
$۲/۱۱)\ x = ۲$ و $x = -۲$



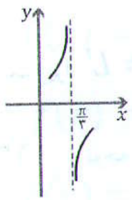
$۲/۱۲)\ x = ۳$



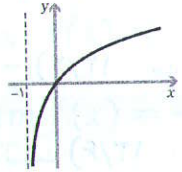
$۲/۱۳)\ x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}$



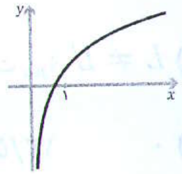
$۲/۱۴)\ x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}, k \in \mathbb{Z}$



$۲/۱۵)\ x = -۱$



$۲/۱۶)\ x = ۰$



تمرین‌های صفحه ۹۶ :

۱/۱) ۰   ۱/۲) ۰ $۱/۳)\ +\infty$ ۱/۴) ۰

۱/۵) ۰ $۱/۶)\ +\infty$ $۱/۷)\ +\infty$ ۱/۸) موجود نیست

$۲/۱)\ -\infty$ $۲/۲)\ -\infty$ $۲/۳)\ -\frac{۱}{۲}$ $۲/۴)\ -\frac{۵}{۴}$

۲/۵) ۰   ۲/۶) ۰ $۲/۷)\ +\infty$ $۲/۸)\ +\infty$

$۲/۹)\ -\infty$ $۲/۱۰)\ +\infty$ $۲/۱۱)\ -۱$ $۲/۱۲)\ \frac{۱}{۴}$

$۲/۱۳)\ +\infty$ $۲/۱۴)\ -\infty$ $۲/۱۵)\ -\frac{۳}{۲}$ $۲/۱۶)\ +\infty$

۲/۱۷) ۰ $۲/۱۸)\ -\infty$ $۲/۱۹)\ \frac{۱}{۲}$ ۲/۲۰) ۰

$۲/۲۱)\ +\infty$ $۲/۲۲)\ -\infty$

۳) ۰ $۴)\ \frac{۱}{۲}$ ۵/۱) ۰   ۵/۲) ۰

$۶/۱)\ n = ۲$ $۶/۲)\ n \geq ۴$ $۶/۳)\ n = ۱$ یا $x = ۲$

$۶/۴)\ a = -۷$ $۶/۵)\ n \geq ۴$ و n زوج $۶/۶)\ n = ۱$ یا $n = ۲$

$۶/۷)\ n = ۳$ و $a = ۲$ $۶/۸)\ n = ۱$ یا $n = ۲$ یا $n = ۳$

$۷/۱)\ y = ۱$ $۷/۲)\ y = ۱$ $۷/۳)\ y = ۰$

$۷/۴)\ y = ۰$ $۷/۵)\ y = ۱$ و $y = -۱$ $۷/۶)\ y = ۰$

۷/۷) با توجه به دامنه، مجانب ندارد $۷/۸)\ y = ۱$ $۷/۹)\ y = ۱$

$۷/۱۰)\ y = -۳$ ۷/۱۱) مجانب ندارد $۷/۱۲)\ y = ۰$

تمرین‌های صفحه ۱۰۵ :

۱/۱) در $x = -۱$ پیوسته است.   ۱/۲) در $x = -۱$ پیوسته است.

۱/۳) در $x = ۲$ فقط پیوستگی راست دارد.   ۱/۴) در $x = ۱$ فقط پیوستگی چپ دارد.

۱/۵) در $x = ۰$ فقط پیوستگی راست دارد.   ۱/۶) در $x = ۱$ هیچ نوع پیوستگی ندارد.

۱/۷) در $x = ۰$ هیچ نوع پیوستگی ندارد.   ۱/۸) در $x = ۳$ پیوسته است.

$۲/۱)\ f(۰) = ۱$ $۲/۲)\ f(۰) = ۲$ $۲/۳)\ f(۲) = -۴$ $۲/۴)\ f(۴) = \frac{۱}{۴}$

$۳/۱)\ a = \frac{-۱۱}{۱۶}$ و $b = \frac{۹}{۴}$ $۳/۲)\ a - ۴b = -۱$

$۴/۱)\ \mathbb{R}$ $۴/۲)\ (-\infty, -۱)$ و $(-۱, ۱)$ و $(۱, +\infty)$

۴/۳) $(-\infty,-۲)$ و $[۱,+\infty)$ ۴/۴) $(-\infty,۱]$ و $[۲,+\infty)$

۵/۱) $-۲\sqrt{۲}<a<۲\sqrt{۲}$ ۵/۲) $b\geq ۰$

۵/۳) $a=\frac{۱}{۳}$ و $b=\frac{۲}{۳}$ ۵/۴) $a=\frac{۱}{۴}$ و $b=\frac{-۱}{۲}$

۶) $f(x)=\begin{cases}۲ & x>۱\\ ۳ & x\leq ۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۳ & x>۱\\ ۲ & x\leq ۱\end{cases}$

الف) $(f+g)(x)=۵$ ب) $(f\cdot g)(x)=۶$

۷/۱) تابع $f(x)=x^{۳}-x-۱$ در فاصله $(۱,۲)$ پیوسته است و داریم $f(۱)<۰$ و $f(۲)>۰$، پس به کمک قضیه مقدار میانی می‌توان نتیجه گرفت که معادله حداقل یک ریشه در این فاصله دارد.

۷/۲) تابع $f(x)=\frac{\pi}{۲}+\sin x-x$ در فاصله $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ پیوسته است و داریم $f(\frac{\pi}{۲})>۰$ و $f(\pi)<۰$، پس به کمک قضیه مقدار میانی می‌توان نتیجه گرفت که معادله حداقل یک ریشه در این فاصله دارد.

فصل سوم: مشتق

تمرین‌های صفحه ۱۱۱ :

۱/۱) $f'(۲)=۰$ ۱/۲) $f'(۱)=۳$ ۱/۳) $f'(۳)=۴$

۱/۴) $f'(-۲)=۱۲$ ۱/۵) $f'(۴)=\frac{۱}{۳}$ ۱/۶) $f'(۰)=۲$

۱/۷) $f'(۰)=۱$ ۱/۸) $f'(\frac{\pi}{۲})=-۱$

۲/۱) $\left(f'_+(۲)=۴ \text{ و } f'_-(۲)=۲\right)\to f'(۲)$ موجود نیست

۲/۲) $\left(f'_+(۰)=۰ \text{ و } f'_-(۰)=۰\right)\to f'(۰)=۰$

۲/۳) $\left(f'_+(۱)=-۱ \text{ و } f'_-(۱)=-۱\right)\to f'(۱)=-۱$

۲/۴) $\left(f'_+(۱)=-۲ \text{ و } f'_-(۱)=-۱\right)\to f'(۱)$ موجود نیست

۲/۵) $\left(f'_+(۰)=\sqrt{۲} \text{ و } f'_-(۰)=-\sqrt{۲}\right)\to f'(۰)$ موجود نیست

۲/۶) $\left(f'_+(۱)=۱ \text{ و } f'_-(۱)=۰\right)\to f'(۱)$ موجود نیست

۲/۷) $\left(f'_+(۰)=+\infty \text{ و } f'_-(۰)=-\infty\right)\to f'(۰)$ موجود نیست

۲/۸) $\left(f'_+(۰)=+\infty \text{ و } f'_-(۰)=-\infty\right)\to f'(۰)$ موجود نیست

۳/۱) $a=۲$ و $b=۰$ ۳/۲) $a=۴$ و $b=-۲$

۳/۳) $a=۳$ و $b=۵$ ۳/۴) $a=۹$ و $b=۱۸$

تمرین‌های صفحه ۱۲۲ :

۱/۱) $f'(x)=۳x^{۲}$ ۱/۲) $f'(x)=۲x+۲$

۱/۳) $f'(x)=\frac{۱}{(x+۱)^{۲}}$ ۱/۴) $f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲x-۱}}$

۲/۱) $f'(x)=۲x^{۷}-۴x^{۳}$ ۲/۲) $v'(r)=۴\pi r^{۲}$

۲/۳) $s'(r)=\pi r+۵\pi$ ۲/۴) $f'(x)=x^{۳}-\frac{۶}{x^{۴}}$

۲/۵) $g'(h)=\frac{۷}{(h+۲)^{۲}}$ ۲/۶) $g'(x)=\frac{۳x^{۲}+۴x+۷}{(۳x+۲)^{۲}}$

۲/۷) $f'(x)=(۲x-۵)(x^{۷}-۸x+۱)+(x^{۲}-۵x)(۷x^{۶}-۸)$

۲/۸) $f'(x)=۲x\cot x-x^{۲}(۱+\cot^{۲}x)$

۲/۹) $g'(x)=-۴\sin x-x\cos x$

۲/۱۰) $g'(t)=t^{۲}\sec t\,(۳+t\tan t)$ ۲/۱۱) $h'(z)=\frac{۱+\cos z-\sin z}{(\cos z+۱)^{۲}}$

۲/۱۲) $g'(z)=\frac{۴\cos z+۲z\cos z-۲\sin z}{(۲+z)^{۲}}$ ۲/۱۳) $h'(t)=t^{۲}(۳\ln t+۱)$

۲/۱۴) $h'(x)=e^{x}(\cos x-\sin x)$

۲/۱۵) $f'(x)=(۲x+۱)(e^{x}+۱)+e^{x}(x^{۲}+x)$

۲/۱۶) $f'(x) = \frac{۱}{x\ln ۳} - e^x - xe^x$

۲/۱۷) $g'(x) = ۵^x((\ln ۵)\sin x + \cos x)$

۲/۱۸) $g'(x) = \frac{e^x + ۳}{x} + e^x(۲ + \ln x)$

۲/۱۹) $f'(x) = ۲x\tanh x + x^۲(۱ - \tanh^۲ x)$

۲/۲۰) $f'(x) = ۲(\cosh^۲ x + \sinh^۲ x)$

۲/۲۱) $f'(x) = ۰$ ۲/۲۲) $f'(x) = \frac{-۱}{۱+x^۲}$

۲/۲۳) $f'(x) = ۲x\cos^{-۱} x - \frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$ ۲/۲۴) $f'(x) = \frac{\tan^{-۱} x}{۲\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x^۲+۱}$

۳/۱) $(fog)'(x) = \cos x\,(\ln ۲)۲^{\sin x}$ ۳/۲) $(fog)'(x) = \frac{۳x^۲+۳}{۲\sqrt{x^۳+۳x-۱}}$

۴/۱) $y' = \frac{-۲}{x^۴} + \frac{۳}{x^۳}$ ۴/۲) $y' = (e^x + xe^x)(۸xe^x - ۵)$

۵/۱) $f'(x) = ۵(۳ - ۳x^۲)(۳x - x^۳)^۴$ ۵/۲) $f'(x) = \frac{۲(۲x-۵)}{۳\sqrt[۳]{x^۲-۵x}}$

۵/۳) $g'(x) = \frac{-۱۵}{۲\sqrt{(۵x+۱)^۳}}$ ۵/۴) $g'(x) = \frac{۴x-۱۰}{۳\sqrt[۳]{(۵x-x^۲)^۴}}$

۵/۵) $f'(x) = -۶x\sin(۳x^۲ + ۳)$

۵/۶) $f'(x) = ۲(۱ + \tan^۲(۲x + ۱))$

۵/۷) $f'(x) = -۳\sin ۳x - ۱۰\cos ۵x$

۵/۸) $f'(x) = ۲(۱ + \tan^۲(۲x)) - ۷\sin ۷x$

۵/۹) $f'(x) = ۵\cos ۵x\cot ۲x - ۲\sin ۵x\,(۱ + \cot^۲ ۲x)$

۵/۱۰) $h'(x) = ۲x\sin(۲x + ۱) + ۲x^۲\cos(۲x + ۱)$

۵/۱۱) $f'(x) = \frac{(۱-x)\cos(۲x-x^۲)}{\sqrt{\sin(۲x-x^۲)}}$ ۵/۱۲) $f'(x) = ۱۵\cos ۵x\sin^۲ ۵x$

۵/۱۳) $h'(x) = ۱۰e^{۵x}$ ۵/۱۴) $f'(x) = \cos x\,(\ln ۴)۴^{\sin x}$

۵/۱۵) $f'(x) = e^x\cos(e^x) - e^{۲x}\sin(e^x)$

۵/۱۶) $\left(g(x) = x^۵ e^{\ln x^{-۳}} = x^۵x^{-۳} = x^۲,\ x > ۰\right) \to g'(x) = ۲x$

۵/۱۷) $f'(x) = \frac{۳}{۳x+۲}$ ۵/۱۸) $g'(x) = \frac{۱}{۳(۲+x)}$

۵/۱۹) $f'(x) = \frac{۹\ln^۲(۳x-۱)}{۳x-۱}$ ۵/۲۰) $h'(x) = \frac{-۱}{x}\sin(\ln x)$

۵/۲۱) $g'(x) = \log_۲(x^۲ + ۱) + \frac{۲x^۲}{(\ln ۲)(x^۲+۱)}$

۵/۲۲) $h'(x) = ۲\cot ۲x$ ۵/۲۳) $f'(x) = \frac{۱}{(x+۱)\ln(x+۱)}$

۵/۲۴) $g'(x) = -۲x(\ln ۳)۳^{x^۲}\sin(۳^{x^۲})$

۵/۲۵) $f'(x) = \frac{-۲e^{۲x}}{\sqrt{۱-e^{۴x}}}$ ۵/۲۶) $f'(x) = \frac{۴x}{۱+(۲x^۲+۳)^۲}$

۵/۲۷) $f'(x) = \frac{-x}{|x|\sqrt{۱-x^۲}}$ ۵/۲۸) $f'(x) = \frac{۲}{(۱+۴x^۲)\tan^{-۱} ۲x}$

۵/۲۹) $f'(x) = ۵\cosh(۵x - ۳)$

۵/۳۰) $g'(x) = e^x(۱ - \tanh^۲(e^x - ۲))$

۵/۳۱) $h'(x) = \frac{(۲x+۱)^۲(-۲x-۱۰)}{(x-۱)^۵}$

۵/۳۲) $f'(x) = (x^۳ - x)^۲(x^۲ + ۱)^۴(۲۲x^۴ - ۲x^۲ - ۴)$

۵/۳۳) $g'(x) = ۲^{۵x}۳^{x^۲}(۵\ln ۲ + ۲x\ln ۳)$

۵/۳۴) $h'(x) = (x + ۱)^۲e^{۵x+۱}(۵x + ۸)$

تمرین‌های صفحه ۱۳۳:

۱/۱) $f'(x) = \frac{-x-۲}{x^۳}$, $f''(x) = \frac{۲x+۶}{x^۴}$

۱/۲) $g'(x) = ۲x\cos(x^۲)$, $g''(x) = ۲\cos(x^۲) - ۴x^۲\sin(x^۲)$

۱/۳) $h'(x) = ۲xe^{x^۲+۱}$, $h''(x) = ۲e^{x^۲+۱}(۱ + ۲x^۲)$

۱/۴) $f'(x) = \frac{۲\ln x}{x}$, $f''(x) = \frac{۲(۱-\ln x)}{x^۲}$

۲/۱) $f'(t) = ۶\cos ۲t$, $f''(t) = -۱۲\sin ۲t$

$f'''(t) = -۲۴\cos ۲t$, $f^{(۴)}(t) = ۴۸\sin ۲t$

۲/۲) $f'(x) = ۳e^{۳x+۱}$, $f''(x) = ۳^۲e^{۳x+۱}$

$f'''(x) = ۳^۳e^{۳x+۱}$, $f^{(۴)}(x) = ۳^۴e^{۳x+۱}$

۲/۳) $f'(x) = \frac{-۶}{(۲x-۱)^۲}$, $f''(x) = \frac{۲۴}{(۲x-۱)^۳}$

$f'''(x) = \frac{-۱۴۴}{(۲x-۱)^۴}$, $f^{(۴)}(x) = \frac{۱۱۵۲}{(۲x-۱)^۵}$

۲/۴) $f'(t) = \frac{۲}{\sqrt{۴t+۱}}$, $f''(t) = \frac{-۴}{\sqrt{(۴t+۱)^۳}}$

$f'''(t) = \frac{۲۴}{\sqrt{(۴t+۱)^۵}}$, $f^{(۴)}(t) = \frac{-۲۴۰}{\sqrt{(۴t+۱)^۷}}$

۳/۱) $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n a^x$ ۳/۲) $f^{(n)}(x) = ۲^n e^{۲x}$

۳/۳) $f^{(n)}(x) = \frac{(-۱)^{n+۱}(n-۱)!}{x^n}$

۳/۴) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & n = ۴k-۳ \\ -\sin x & n = ۴k-۲ \\ -\cos x & n = ۴k-۱ \\ \sin x & n = ۴k \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$

۴/۱) $\frac{dy}{dx} = \frac{۳y-۲x}{۳y^۲-۳x}$ ۴/۲) $\frac{dy}{dx} = \frac{۷y^۲-۱۲x^۳y^۲}{۶x^۴y-۱۴xy+۳}$

۴/۳) $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^۲}{x^۲}$ ۴/۴) $\frac{dy}{dx} = \frac{۱-۲xy}{x^۲-۲}$

۴/۵) $\frac{dy}{dx} = \frac{y\sin x-\cos y}{\cos x-x\sin y}$ ۴/۶) $\frac{dy}{dx} = -\frac{۲\sin(۲x+۳y)+y\cos x}{۳\sin(۲x+۳y)+\sin x}$

۴/۷) $\frac{dy}{dx} = \frac{۳x^۲}{e^y(x^۲+۳y)-۳}$ ۴/۸) $\frac{dy}{dx} = \frac{-(۲ye^{۲x}+e^{۲y})}{e^{۲x}+۲xe^{۲y}}$

۴/۹) $\frac{dy}{dx} = \frac{(۱+y^۲)\sin y}{۱-x(۱+y^۲)\cos y}$ ۴/۱۰) $\frac{dy}{dx} = \frac{(y-۲x)\sqrt{۱-۴y^۲}}{۲-x\sqrt{۱-۴y^۲}}$

۵/۱) $\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{۲x\sqrt{x}}$ ۵/۲) $\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{-۲x^۴-۲xy^۳}{y^۵}$

۵/۳) $\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{۱۰y}{۹x^۲}$ ۵/۴) $\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{۸(x^۲+y^۲+۶xy)}{(۳x+y)^۳}$

۶/۱) با مشتق‌گیری ضمنی از رابطه $x = \cos y$ و محدودیت $۰ \le y \le \pi$ ثابت می‌شود.

۶/۲) با مشتق‌گیری ضمنی از رابطه $x = \cot y$ ثابت می‌شود.

۷/۱) $f'(x) = x^{\sqrt{x}}(\frac{۲+\ln x}{۲\sqrt{x}})$ ۷/۲) $f'(x) = x^{\ln x}(\frac{۲\ln x}{x})$

۷/۳) $f'(x) = (\ln x)^x[\ln(\ln x) + \frac{۱}{\ln x}]$

۷/۴) $f'(x) = (\sin x)^x[\ln(\sin x) + x\cot x]$

۸/۱) $f'(x) = f(x)(\frac{۳}{x} + \frac{۱۰x}{x^۲-۱} + \frac{۴}{x+۱})$

۸/۲) $f'(x) = f(x)(\frac{۱}{۲}\tan x + ۳\cot ۳x + \cot x)$

۸/۳) $f'(x) = f(x)(\frac{۱}{x} + \frac{x}{x^۲+۱} - \frac{۲}{۳(x+۱)})$

۸/۴) $f'(x) = f(x)(\frac{۱۴}{۳x} + \frac{۱}{(۱+x^۲)\tan^{-۱}x} + \frac{۲}{۳-۲x})$

۹/۱) $y = \frac{۱}{۲۷}(x-۲)^۳ \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۱}{۹}(x-۲)^۲$

۹/۲) $y = -\ln(۱-x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۱}{۱-x}$

۹/۳) $x^۲ + y^۲ = ۱ \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

۹/۴) $x = (y+۲)^۲ \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۱}{۲(y+۲)}$

۱۰/۱) $\frac{dy}{dx} = \frac{۱+\ln t}{۵e^{۵t}}$ ۱۰/۲) $\frac{dy}{dx} = \frac{۳t^۲+۴t}{۲t+۵}$

۱۰/۳) $\frac{dy}{dx} = \frac{۳\cos(۳t+۱)}{-۲\sin ۲t}$ ۱۰/۴) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - t\sin t}{\sec t \tan t}$

۱۱/۱) $\frac{dy}{dx}(t=۲) = ۱۵$ ۱۱/۲) $\frac{dy}{dx}(t=۲) = \frac{۱}{۱۱}$

۱۲/۱) $\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{-۴t^۳}{(t^۲-۱)^۳}$ ۱۲/۲) $\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{۳}{۴t}$

فصل چهارم: کاربرد مشتق

تمرین‌های صفحه ۱۴۳ :

۱/۱) $y = \frac{۵}{۴}x + \frac{۳}{۴}$ خط مماس ، $y = \frac{-۴}{۵}x + \frac{۱۴}{۵}$ خط قائم

۱/۲) $x = ۱$ خط مماس ، $y = ۲$ خط قائم

۱/۳) $y = ۲x - \frac{\pi}{۲} + ۱$ خط مماس ، $y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{\pi}{۸} + ۱$ خط قائم

۱/۴) $y = -x + \frac{\pi}{۲}$ خط مماس ، $y = x + \frac{\pi}{۲}$ خط قائم

۱/۵) $y = \frac{-۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}\ln ۲ + \frac{۱}{۲}$ خط مماس ، $y = ۲x - ۲\ln ۲ + \frac{۱}{۲}$ خط قائم

۱/۶) $y = ۸x - ۸$ خط مماس ، $y = -\frac{۱}{۸}x + \frac{۱}{۸}$ خط قائم

۲/۱) $y = e$ ۲/۲) $y = x - ۳$ و $y = x + ۵$

۳/۱) $y = \frac{۱}{۴}x + \frac{۱}{۴}$ ۳/۲) $y = -x - e^{-۲}$

۴/۱) $y = x + \pi$ خط مماس ، $y = -x + \pi$ خط قائم

۴/۲) $y = \frac{-۱}{۴}x + \frac{۵}{۴}$ خط مماس ، $y = ۴x - ۳$ خط قائم

۵/۱) $y = ۹x - ۲۳$ ۵/۲) $y = \frac{۱}{۲e}x - \frac{۱}{۲}$

۶) $T(۲-\sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲}-۲)$ ۷) $T(۳,۹)$ ۸) $A(-۳,۲)$ ، $B(-\frac{۱}{۳}, -۲)$

۹/۱) $A(-۱,۱)$ ، $B(۰,۰)$ ، $C(۲,۴)$

$\alpha = \tan^{-۱}(\frac{۳}{۴}) = ۳۶/۸۶^\circ$ زاویه بین دو منحنی در نقطه $x = -۱$:

۹/۲) $A(۰,۰)$ ، $B(۱,۶)$ ، $C(۲,۲۴)$

$\alpha = \tan^{-۱}(\frac{۲}{۹}) = ۱۲/۵۲^\circ$ زاویه بین دو منحنی در نقطه $x = ۰$:

تمرین‌های صفحه ۱۵۰ :

۱/۱) $s = \pi r^۲ \rightarrow \frac{ds}{dr} = ۲\pi r$ ۱/۲) $s = ۶x^۲ \rightarrow \frac{ds}{dx} = ۱۲x$

۱/۳) $s = ۳x^۲ \rightarrow \frac{ds}{dx} = ۶x$ ۱/۴) $v = \frac{\pi}{۱۲}h^۳ \rightarrow \frac{dv}{dh} = \frac{\pi}{۴}h^۲$

۱/۵) $(v = a^۳,\ s = ۶a^۲) \rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{a}{۴}$ (به کمک مشتق‌گیری پارامتری)

۱/۶) $(v = \frac{۴}{۳}\pi r^۳,\ s = ۴\pi r^۲) \rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{۱}{۲}r$ (به کمک مشتق‌گیری پارامتری)

۲) $s(r) = ۴\pi r^۲$ ، $\frac{\Delta s}{\Delta r} = \frac{s(۵)-s(۳)}{۵-۳} = ۳۲\pi\ cm^۲/cm$ میزان متوسط

$s'(۵) = ۴۰\pi\ cm^۲/cm$ میزان لحظه‌ای

۳) $v(r) = \frac{۴\pi}{۳}(۴ - ۰/۰۴t)^۳\ m^۳/min$ ، $v'(۶۰) = -\frac{(۱/۶)^۲\pi}{۱۰}\ m^۳/min$

۴) $s(۱) = ۲/۵\ m$ ، $v(۱) = ۲\ m/s$ ، $a(۱) = ۰\ m/s^۲$

۵) $I(۲) = Q'(۲) = ۵\ A$

۶) $v'(t) = \frac{-۷۵}{۴}\ Lit/min$

۷) $\frac{f(۲۰)-f(۰)}{۲۰-۰} = ۵(e^{۰/۸}-۱)$ رشد متوسط ، $f'(۲۰) = ۴e^{۰/۸}$ رشد لحظه‌ای

۸) $\frac{c(۱۰۰)}{۱۰۰} = ۲۵۵$ هزینه متوسط ، $c'(۱۰۰) = ۲۱۰$ هزینه نهایی

تحلیل اقتصادی: در تولید ۱۰۰ عروسک، هزینه متوسط هرکدام ۲۵۵ تومان است و اگر کارخانه تصمیم بگیرد یک عروسک بیشتر تولید کند، هزینه یکصدویکمین عروسک، ۲۱۰ تومان می‌شود.

تمرین‌های صفحه ۱۵۶ :

۱) $x_{۰} = ۳ \ , \ \frac{dx}{dt} = \frac{۲۸}{۳}$ ۲) $y_{۰} = ۴ \ , \ \frac{dx}{dt} = -۱$

۳) $s = \pi r^{۲} \ , \ \frac{ds}{dt} = ۴۰۰\pi \ m^{۲}/s$ (عملیات مشابه مثال ۲ صفحه ۱۵۲)

۴) $v = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \ , \ s = ۴\pi r^{۲} \ , \ r_{۰} = ۳ \ , \ \frac{dv}{dt} = ۱۸\pi \ m^{۳}/s \ , \ \frac{ds}{dt} = ۱۲\pi \ m^{۲}/s$

۵) $v = x^{۳} \ , \ s = ۶x^{۲} \ , \ \frac{dv}{dt} = ۶۰ \ cm^{۳}/s \ , \ \frac{ds}{dt} = ۲۴ \ cm^{۲}/s$

۶) $\xrightarrow{\text{رابطه تالس}} h = ۴r \ , \ v = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{۳}{۱۶\pi} \ m/min$ (عملیات مشابه مثال ۴ صفحه ۱۵۳)

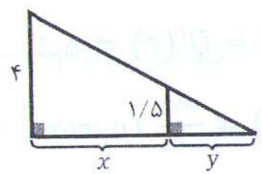
۷) $x^{۲} + y^{۲} = ۲۵^{۲} \ , \ x_{۰} = \sqrt{۲۵^{۲} - ۲۰^{۲}} = ۱۵ \ , \ \frac{dy}{dt} = -۴ \ m/s$

$\frac{dx}{dt} = \frac{۱۶}{۳} \ m/s$ (عملیات مشابه مثال ۵ صفحه ۱۵۴)

۸) $x^{۲} + y^{۲} = z^{۲} \ , \ z_{۰} = \sqrt{۲۰۰^{۲} + ۱۵۰^{۲}} = ۲۵۰ \ m = ۰/۲۵ \ km \ , \ \frac{dz}{dt} = ۱۰۸ \ km/h$

۹) $h = ۲r \ , \ v = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h = \frac{\pi}{۱۲}h^{۳} \ , \ \frac{dh}{dt} = \frac{۴}{۵\pi} m/min$

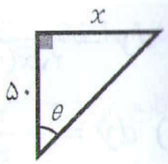
۱۰/۱) $\xrightarrow{\text{رابطه تالس}} \frac{۱/۵}{۴} = \frac{y}{x+y} \to ۱/۵x = ۲/۵y$



$\frac{dy}{dt} = ۰/۷۵ \ m/s$

۱۰/۲) $z = x + y \to \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = ۱/۲۵ + ۰/۷۵ = ۲ \ m/s$

۱۱) $\theta = tan^{-۱}(\frac{x}{۵۰}) \ , \ \frac{dx}{dt} = ۱۰ \ m/s \ , \ x_{۰} = ۵۰ \ m$



$\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۱۰} \ rad/min$ (عملیات مشابه مثال ۶ صفحه ۱۵۵)

تمرین‌های صفحه ۱۶۳ :

۱) $v = x^{۳} \ , \ s = ۶x^{۲} \ , \ x_{۰} = ۱۵ \ cm \ , \ \Delta x = \pm ۰/۰۱ \ cm$

$\Delta v = \pm ۶/۷۵ \ cm^{۳} \ , \ \Delta s \cong \pm ۱/۸ \ cm^{۲}$

۲) $s = (۲x)x = ۲x^{۲} \ , \ x_{۰} = ۴۵ \ m \ , \ \Delta x = \pm ۰/۰۲ \ m \ , \ \Delta s \cong \pm ۳/۶ \ m^{۲}$

۳) $v = \frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}) \ , \ r_{۰} = ۴ \ m \ , \ \Delta r = ۰/۵ \ m$

$\Delta v \cong ۰/۱۶\pi \ m^{۳} \cong ۰/۵ \ m^{۳}$

۴) $v = ۱۰\pi r^{۲} \ , \ r_{۰} = ۲/۵ \ cm \ , \ \Delta r = -۰/۲ \ cm \ , \ \Delta v \cong -۱۰\pi \ cm^{۳}$

۵/۱) $۰/۲ + \frac{۱}{۲۰۰}$ ۵/۲) $\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۲۸}$ ۵/۳) $۱ - \frac{۱}{۳۰۰۰}$

۵/۴) $۳ + \frac{۱}{۱۰۸}$ ۵/۵) $۱ + \frac{\pi}{۹۰}$ ۵/۶) $\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}\pi}{۱۸۰}$

۵/۷) $۴ + \frac{۱}{۱۰}$ ۵/۸) $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳۲۰}$ ۵/۹) $۰/۹۷ e$

۵/۱۰) $۰/۰۵$ ۵/۱۱) $\frac{\pi}{۴} + \frac{۱}{۱۰۰}$ ۵/۱۲) $۲ + \frac{\sqrt{۳}\pi}{۴۵}$

۶/۱) $dy = \frac{۱}{۴\sqrt[۴]{x^{۳}}}dx$ ۶/۲) $dy = ۱۴(x-۱)(x^{۲}-۲x)^{۶}dx$

۶/۳) $dy = ۵\cos ۵t \ dt$ ۶/۴) $dy = -۲\sin t \cos t \ dt$

۶/۵) $dy = \frac{۴-x}{x^{۳}}dx$ ۶/۶) $dy = (۲x\sin x + x^{۲}\cos x)dx$

۶/۷) $du = (3\ln 2)2^{3x-2}\,dx$

۶/۸) $du = \frac{1-\ln x}{x^2}dx$

۶/۹) $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$

۶/۱۰) $dy = (\sin^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}})\,dx$

۶/۱۱) $dy = -\frac{2xy+y^3}{x^2+3xy^2}dx$

۶/۱۲) $dy = \frac{2xy-2\cos(2x+3y)}{3\cos(2x+3y)-x^2}dx$

تمرین‌های صفحه ۱۷۰ :

۱/۱) $\frac{-2}{3}$	۱/۲) $\frac{1}{3}$	۱/۳) $\frac{3}{4}$	۱/۴) 1
۱/۵) $-\pi$	۱/۶) $\frac{2}{3}$	۱/۷) $\frac{1}{n}$	۱/۸) 0
۱/۹) 0	۱/۱۰) 0	۱/۱۱) 0	۱/۱۲) $\frac{1}{3}$
۱/۱۳) 1	۱/۱۴) $\frac{-2}{\pi}$	۱/۱۵) 0	۱/۱۶) 0
۲/۱) 1	۲/۲) e	۲/۳) 1	۲/۴) 1
۲/۵) e^2	۲/۶) e^{-2}	۲/۷) e^{-1}	۲/۸) $e^{-\frac{1}{2}}$

تمرین‌های صفحه ۱۸۰ :

۱/۱) شرایط قضیه رل برقرار و نقطه مورد نظر $x = \frac{5}{2}$ است.

۱/۲) شرایط قضیه رل برقرار و نقاط مورد نظر $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ است.

۱/۳) تابع در $x = 1$ پیوسته نیست، پس شرایط قضیه رل برقرار نمی‌باشد.

۱/۴) تابع در $x = 2$ مشتق ندارد، پس شرایط قضیه رل برقرار نیست.

۱/۵) شرایط قضیه رل برقرار و نقطه مورد نظر $x = \frac{\pi}{4}$ است.

۱/۶) شرایط قضیه رل برقرار و نقطه مورد نظر $x = \pi$ است.

۲/۱) شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار و نقطه مورد نظر $x = \frac{1}{2}$ است.

۲/۲) شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار و نقطه مورد نظر $x = \sin^{-1}(\frac{2}{\pi-2})$ است.

۲/۳) تابع در $x = -1$ پیوسته نیست، لذا شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار نمی‌باشد.

۲/۴) شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار و نقطه مورد نظر $x = \ln(e-1)$ است.

۲/۵) شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار و نقطه مورد نظر $x = \frac{8}{3\sqrt{3}}$ است.

۲/۶) تابع در $x = 0$ تعریف نمی‌شود پس در فاصله $[0,1]$ پیوسته نیست، لذا شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار نمی‌باشد.

۳/۱) $\sin x = 1 - \frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4 - \frac{1}{6!}(x-\frac{\pi}{2})^6 + \cdots$

۳/۲) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

۳/۳) $Ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

۳/۴) $e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \cdots$

۳/۵) $\frac{1}{x^2} = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \cdots$

۳/۶) $Ln(x^2) = 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}(x-1)^4 + \cdots$

۳/۷) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$

۳/۸) $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots$

۴/۱) $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \cdots$

۴/۲) $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \cdots$

۴/۳) $\sin 4x = 4x - \frac{(4x)^3}{3!} + \frac{(4x)^5}{5!} - \frac{(4x)^7}{7!} + \cdots$

۴/۴) $Ln(x^2+1) = \ln 2 + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{8}(x-1)^4 - \cdots$

$۵/۱)\ \sin x + \cos x = ۱ + x - \frac{x^۲}{۲!} - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۶}{۶!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots$

$۵/۲)\ \sinh x = \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \frac{x^۷}{۷!} \cdots$

$۵/۳)\ \frac{\ln x}{x-۱} = ۱ - \frac{۱}{۲}(x-۱) + \frac{۱}{۳}(x-۱)^۲ - \frac{۱}{۴}(x-۱)^۳ + \cdots$

$۵/۴)\ x^۳ \cos x = x^۳ - \frac{x^۵}{۲!} + \frac{x^۷}{۴!} - \frac{x^۹}{۶!} + \cdots$

۶/۱) $x = -۰/۷۵۴$ (تقریب اولیه $x_۱ = -۱$) ۶/۲) $x = ۱/۱۶۴$ (تقریب اولیه $x_۱ = ۱$)

۶/۳) $x = ۲/۳۸۰$ (تقریب اولیه $x_۱ = ۲$) ۶/۴) $x = ۰/۳۱۴$ (تقریب اولیه $x_۱ = ۱$)

تمرین‌های صفحه ۱۹۳:

۱/۱) $f'(x) = -۱ - ۲x$

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f'		+	۰	−	
f		↗	$\frac{۱۳}{۴}$	↘	

۱/۲) $f'(x) = ۸x - ۴$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f'		−	۰	+	
f		↘	۰	↗	

۱/۳) $f'(x) = ۳x^۲ + ۲$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		+	
f		↗	

۱/۴) $f'(x) = ۶x - ۳x^۲$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
f'		−	۰	+	۰	−	
f		↘	-۲	↗	۲	↘	

۱/۵) $f'(x) = ۴x - ۴x^۳$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
f'		+	۰	−	۰	+	۰	−	
f		↗	۱	↘	۰	↗	۱	↘	

۱/۶) $f'(x) = ۴x^۳ + ۴$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
f'		−	۰	+	
f		↘	-۳	↗	

۱/۷) $f'(x) = \frac{-۱}{۲x^۲}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		−	ن	−	
f		↘	ن	↘	

۱/۸) $f'(x) = \frac{۲}{(۱-x)^۲}$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f'		+	ن	+	
f		↗	ن	↗	

۱/۹) $f'(x) = \frac{-۲x}{(x^۲+۱)^۲}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		+	۰	−	
f		↗	۱	↘	

۱/۱۰) $f'(x) = \frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲}$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
f'		−	۰	+	۰	−	
f		↘	$-\frac{۱}{۲}$	↗	$\frac{۱}{۲}$	↘	

۱/۱۱) $f'(x) = \frac{۱-۲x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$

x	-۱		$\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$		$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$		۱
f'		−	۰	+	۰	−	
f	۰	↘	$-\frac{۱}{۲}$	↗	$\frac{۱}{۲}$	↘	۰

۱/۱۲) $f'(x) = \frac{۱۲-۳x}{۲\sqrt{۶-x}}$

x	$-\infty$		۴		۶
f'		+	۰	−	
f		↗	$۴\sqrt{۲}$	↘	۰

۱/۱۳) $f'(x) = \frac{x(۳x-۴)}{۳\sqrt[۳]{(x^۳-۲x^۲)^۲}}$

x	$-\infty$		۰		$\frac{۴}{۳}$		۲		$+\infty$
f'		+	ن	−	۰	+	ن	+	
f		↗	۰	↘	$\frac{-۲\sqrt[۳]{۴}}{۳}$	↗	۰	↗	

۱/۱۴) $f'(x) = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		−	ن	+	
f		↘	۰	↗	

۱/۱۵) $f'(x) = ۱ - \sin x$

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		۲π
f'		+	۰	+	
f	۱	↗	$\frac{\pi}{۲}$	↗	$۲\pi+۱$

۱/۱۶) $f'(x) = ۱ - ۲\cos x$

x	۰		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		۲π
f'		−	۰	+	۰	−	
f	۰	↘	$\frac{\pi}{۳}-\sqrt{۳}$	↗	$\frac{۵\pi}{۳}+\sqrt{۳}$	↘	۲π

۱/۱۷) $f'(x)=\begin{cases}۲x & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -۲x & x<۰\end{cases}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		+	۰	+	
f		↗	۰	↗	

۱/۱۸) $f'(x)=\begin{cases}۲x & x<-۱ \text{ یا } ۱<x\\ \text{ندارد} & x=\pm ۱\\ -۲x & -۱<x<۱\end{cases}$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
f'		−	ن	+	۰	−	ن	+	
f		↘	۰	↗	۱	↘	۰	↗	

۱/۱۹) $f'(x)=\dfrac{۲-\ln x}{۲x\sqrt{x}}$

x	۰		$e^{۲}$		$+\infty$
f'		+	۰	−	
f		↗	$۲e^{-۱}$	↘	

۱/۲۰) $f'(x)=xe^{x}(۲+x)$

x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
f'		+	۰	−	۰	+	
f		↗	$۴e^{-۲}$	↘	۰	↗	

۲/۱) نقاط بحرانی : ۰ و ۱ و ۳ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۵ و ۱

۲/۲) نقاط بحرانی : ۴- و ۱- و ۱ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۲ و ۷-

۲/۳) نقاط بحرانی : ۳- و ۲- و ۲ و ۵ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۶۶ و ۱۵-

۲/۴) نقاط بحرانی : ۲- و ۱- و ۰ و ۱ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۹ و ۰

۲/۵) نقاط بحرانی : ۳- و۱- و ۰ و ۱ و۲ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۶۵ و ۱

۲/۶) نقاط بحرانی : ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۵۵ و ۵۷-

۲/۷) نقاط بحرانی : ۱ و ۲ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب $\frac{۱}{۳}$ و ۰

۲/۸) نقاط بحرانی : $\frac{۱}{۲}$ و ۱ و ۲ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب $\frac{۵}{۲}$ و ۲

۲/۹) نقاط بحرانی : ۰ و ۲ و ۳ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۲ و ۰

۲/۱۰) نقاط بحرانی : ۲ − و ۱ − و $\frac{-۱}{۲}$ و ۰ و ۱ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۲ و $\frac{۱}{۴}$

۲/۱۱) نقاط بحرانی : ۱ و ۲ و ۱۰ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۴ و ۰

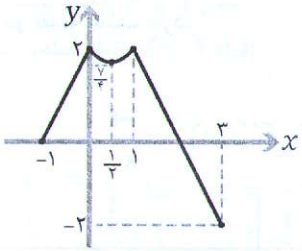
۲/۱۲) نقاط بحرانی : ۱- و ۰ و ۲ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۳ و $\sqrt{۵}$

۲/۱۳) نقاط بحرانی : $\pi-$ و $\frac{-۵\pi}{۶}$ و $\frac{-\pi}{۶}$ و π ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب $\pi+۲$ و $\frac{-\pi}{۶}-\sqrt{۳}$

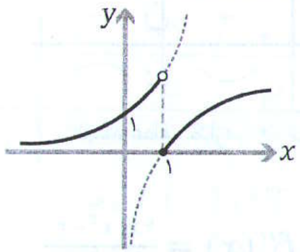
۲/۱۴) نقاط بحرانی : ۰ و $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۳}$ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب $\sqrt{۲}$ و ۱

۲/۱۵) نقاط بحرانی :۱ و e و $e^{۲}$ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب $\frac{۱}{e}$ و ۰

۲/۱۶) نقاط بحرانی : ۰ و ۱ و ۲ ، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب $\frac{۱}{e}$ و ۰



۳/۱) ماکزیمم و می‌نیمم مطلق به ترتیب ۲ و ۲- می‌باشد. تابع در نقاط (۰, ۲) و (۱, ۲) ماکزیمم نسبی و در نقطه $(\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۴})$ می‌نیمم نسبی دارد.



۳/۲) ماکزیمم مطلق ندارد و می‌نیمم نسبی برابر صفر است. تابع نقطه ماکزیمم نسبی ندارد و نقطه (۱, ۰) می‌نیمم نسبی است.

۴/۱) $f''(x)=۶$

x	$-\infty$		$+\infty$
f''		+	
f		∪	

نقطه عطف ندارد.

۴/۲) $f''(x)=۸$

x	$-\infty$		$+\infty$
f''		+	
f		∪	

نقطه عطف ندارد.

۴/۳) $f''(x) = ۶(x - ۱)$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f''		$-$	۰	$+$	
f		⌢	-۱	⌣	

یک نقطه عطف دارد.

۴/۴) $f''(x) = ۶(x - ۱)$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f''		$-$	۰	$+$	
f		⌢	۲	⌣	

یک نقطه عطف دارد.

۴/۵) $f''(x) = ۱۲x^۲$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f''		$+$	۰	$+$	
f		⌣	-۱	⌣	

نقطه عطف ندارد.

۴/۶) $f''(x) = ۱۲x(x - ۱)$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
f''		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f		⌣	۰	⌢	-۱	⌣	

دو نقطه عطف دارد.

۴/۷) $f''(x) = \frac{۱۲}{(۲x-۱)^۳}$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f''		$-$	ن	$+$	
f		⌢	ن	⌣	

نقطه عطف ندارد.

۴/۸) $f''(x) = \frac{-۲}{x^۳}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f''		$+$	ن	$-$	
f		⌣	ن	⌢	

نقطه عطف ندارد.

۴/۹) $f''(x) = \frac{۲}{x^۳}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f''		$-$	ن	$+$	
f		⌢	ن	⌣	

نقطه عطف ندارد.

۴/۱۰) $f''(x) = \frac{۲x(x^۲-۳)}{(x^۲+۱)^۳}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
f''		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f		⌢	$-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$	⌣	۰	⌢	$\frac{\sqrt{۳}}{۴}$	⌣	

سه نقطه عطف دارد.

۴/۱۱) $f''(x) = \frac{-۱}{۴\sqrt{x^۳}}$

x	۰		$+\infty$
f''		$-$	
f		⌢	

نقطه عطف ندارد.

۴/۱۲) $f''(x) = \frac{-(۲x^۲+۹)}{(۹-x^۲)\sqrt{۹-x^۲}}$

x	-۳		۳
f''		$-$	
f		⌢	

نقطه عطف ندارد.

۴/۱۳) $f''(x) = \frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{x^۵}}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f''		$+$	ن	$-$	
f		⌣	۰	⌢	

چون $f'(۰)$ موجود نیست لذا نقطه $(۰,۰)$، نقطه عطف نمی‌باشد.

۴/۱۴) $f''(x) = \frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{x^۴}}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f''		$-$	ن	$-$	
f		⌢	۰	⌢	

در هر فاصله به طور جداگانه، تقعر به سمت پایین است و نقطه عطف ندارد.

۴/۱۵) $f''(x) = \begin{cases} ۲ & x < -۲ \text{ یا } ۰ < x \\ \text{ندارد} & x = -۲ \text{ و } ۰ \\ -۲ & -۲ < x < ۰ \end{cases}$

x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
f''		$+$	ن	$-$	ن	$+$	
f		⌣	۰	⌢	۰	⌣	

چون $f'(۰)$ و $f'(-۲)$ موجود نیست لذا نقاط $(۰,۰)$ و $(-۲,۰)$، نقاط عطف نمی‌باشند.

۴/۱۶) $f''(x) = \begin{cases} ۲ & x > ۰ \\ \text{ندارد} & x = ۰ \\ -۲ & x < ۰ \end{cases}$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f''		$-$	ن	$+$	
f		⌢	۰	⌣	

چون $f'(۰)$ موجود است، پس نقطه $(۰,۰)$، نقطه عطف می‌باشد.

۴/۱۷) $f''(x) = -\cos x$

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
f''		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
f		⌢	$\frac{\pi}{۲}$	⌣	$\frac{۳\pi}{۲}$	⌢	

دو نقطه عطف دارد.

۴/۱۸) $f''(x) = -\sin x$

x	۰		π		۲π
f''		$-$	۰	$+$	
f		⌢	π	⌣	

یک نقطه عطف دارد.

$4/19)\ f''(x) = \frac{1}{x}$

x	$\cdot$		$+\infty$
f''		$+$	
f			

نقطه عطف ندارد.

$4/20)\ f''(x) = e^{x}(2 + x)$

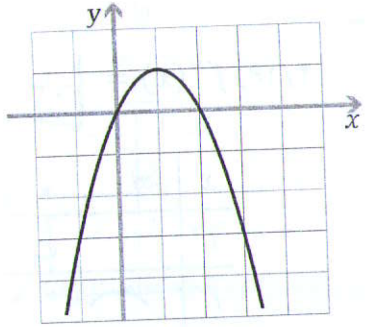
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f''		$-$	$\cdot$	$+$	
f			$-2e^{-2}$		

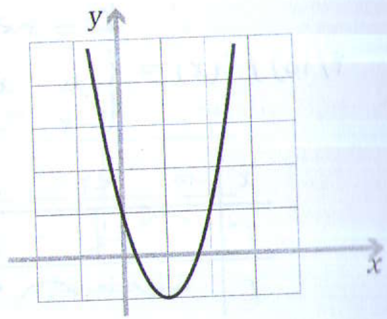
یک نقطه عطف دارد.

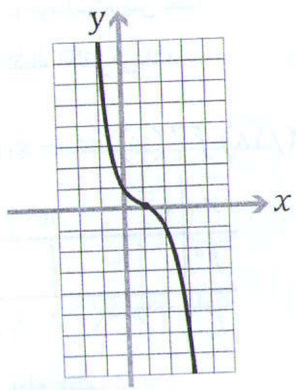
$5/1)\ \begin{cases} f(1) = 2 \\ f''(1) = 0 \end{cases} \rightarrow (a = -1$ و $b = 3)$

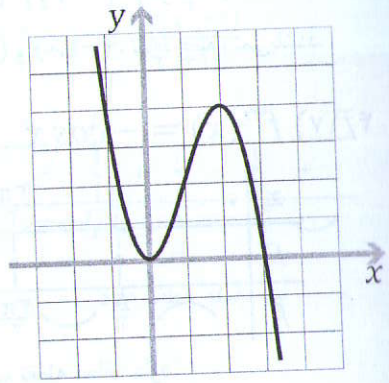
$5/2)\ \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(2) = 0 \end{cases} \rightarrow (a = -6$ و $b = 9)$

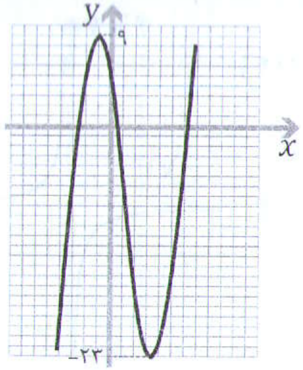
تمرین‌های صفحه ۲۰۶ :

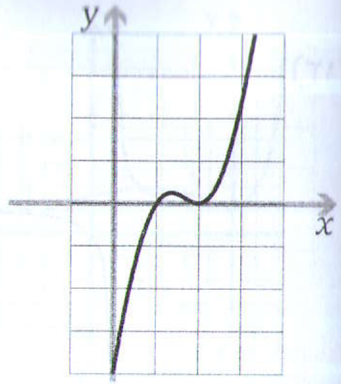
1/1)


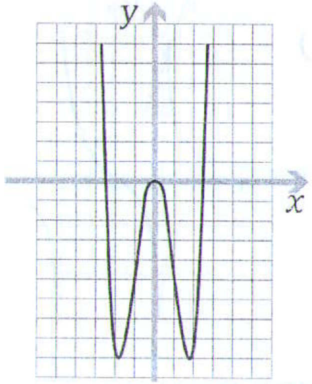
1/2)


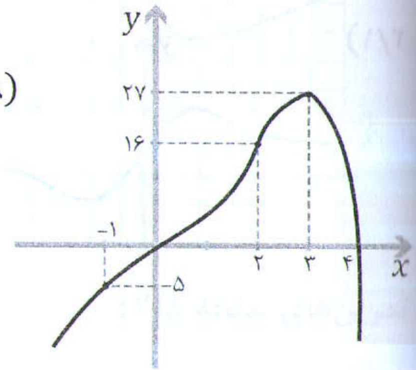
1/3)


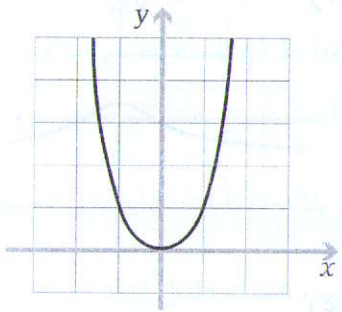
1/4)


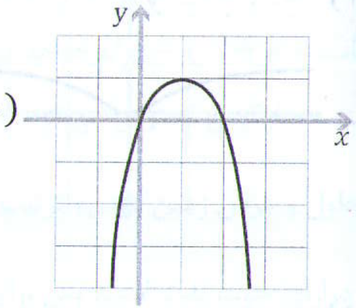
1/5)


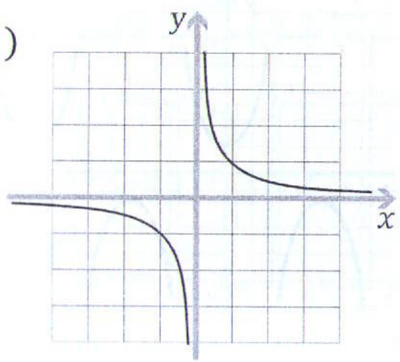
1/6)


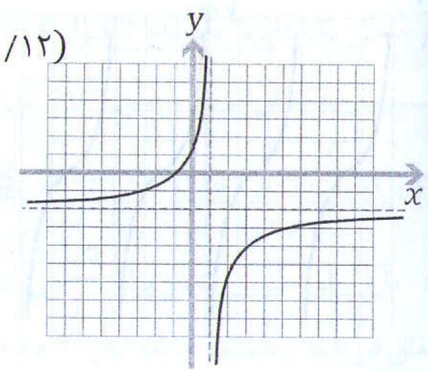
1/7)


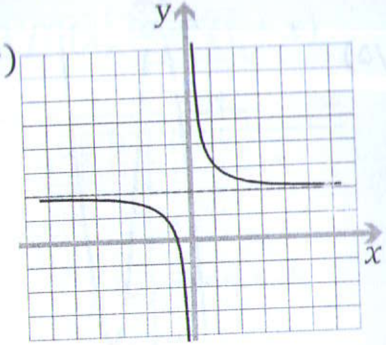
1/8)


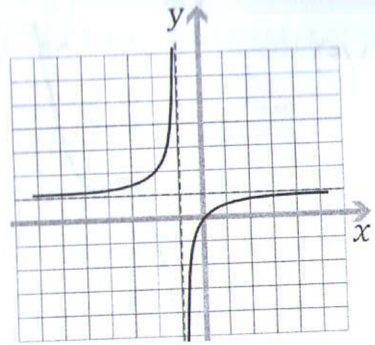
1/9)


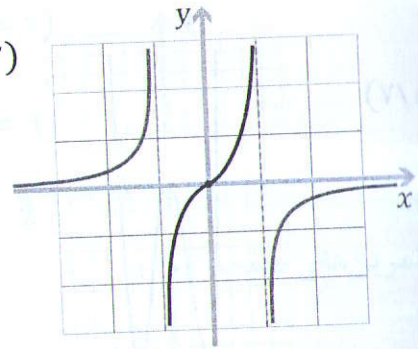
1/10)


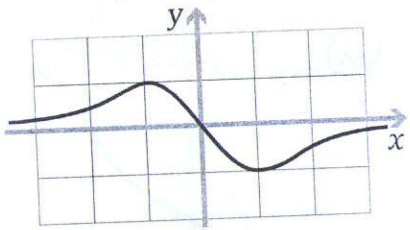
1/11)


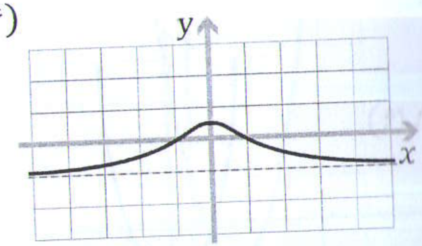
1/12)


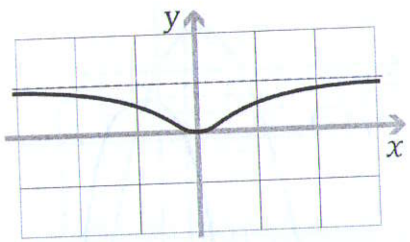
(۱/۱۴


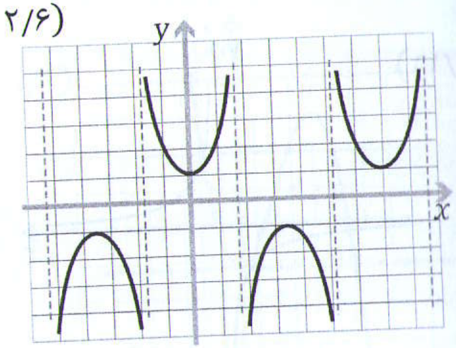
(۱/۱۳


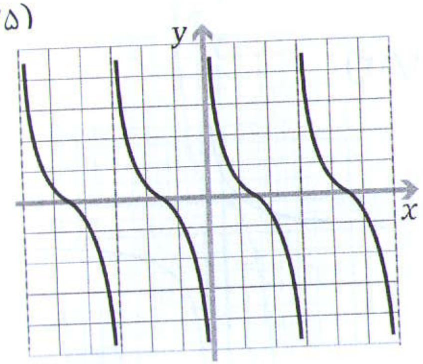
(۲/۲


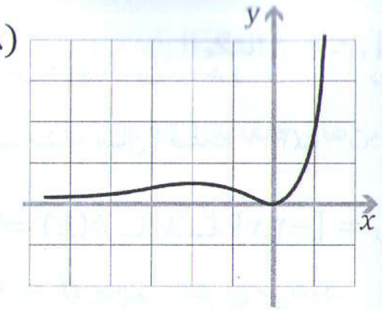
(۲/۱


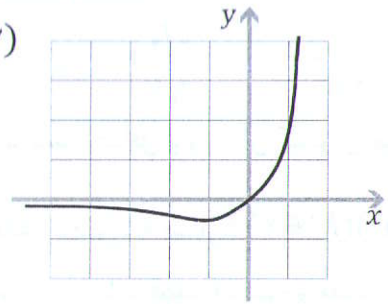
(۲/۴


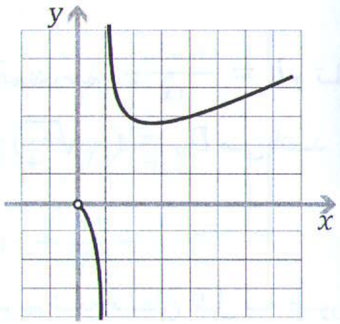
(۲/۳


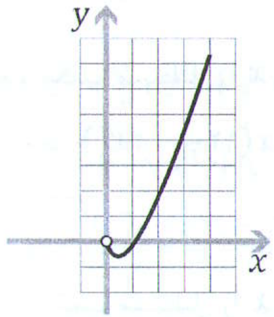
(۲/۶


(۲/۵


(۲/۸


(۲/۷


(۲/۱۰


(۲/۹


تمرین‌های صفحه ۲۱۸ :

۱- اگر یکی از اضلاع مستطیل را x فرض کنیم، تابع محیط به صورت $p(x) = ۲(x + \frac{۴۰۰}{x})$ با دامنه $D_p = (۰, +\infty)$ خواهد بود. با انتخاب $x = ۲۰m$ محیط می‌نیمم و در نتیجه هزینه حصارکشی کمترین می‌شود. لازم به توضیح است زمین به شکل مربع در می‌آید.

۲- طول و عرض زمین باید به ترتیب ۱۰۰ و ۵۰ متر باشد (عملیات مشابه مثال ۱ صفحه ۲۰۸).

۳- درازای چوب ثابت است؛ پس برای حجم ماکزیمم، باید به دنبال ابعاد مستطیلی بود که در داخل یک دایره به شعاع ۳ قرار گیرد و بیشترین مساحت را نیز داشته باشد. این مستطیل به شکل مربع با ضلع $۳\sqrt{۲}$ می‌باشد (عملیات مشابه مثال ۸ صفحه ۲۱۳).

۴- با تولید ۱۰,۰۰۰ جفت کفش در ماه، سود ماکزیمم می‌شود (عملیات مشابه مثال ۲ صفحه ۲۰۹).

۵- طول کوتاهترین مسیر برابر $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ می‌باشد که در نقطه‌ای به طول $x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ یا $x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اتفاق می‌افتد (عملیات مشابه مثال ۹ صفحه ۲۱۴).

۶- با انتخاب $r=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\,m$ و $h=\frac{4}{\sqrt[3]{2\pi}}\,m$ سطح کل استوانه می‌نیمم و در نتیجه ورق مصرف شده حداقل و وزن آن کمترین می‌شود (عملیات مشابه مثال ۶ صفحه ۲۱۱).

۷- تابع حجم به صورت $v(h)=\frac{1}{3}\pi(9-h^2)(h+3)$ با دامنه $D_v=[-3,3]$ می‌باشد. به کمک قضیه اکسترمم مطلق و با انتخاب $H=4$ حجم بیشترین می‌شود.

۸- اگر ابعاد مکعب مستطیل را x , $2x$ و h در نظر بگیریم داریم: $h=\frac{120-2x^2}{3x}$ و تابع حجم به صورت $v(x)=\frac{2}{3}x(120-2x^2)$ با دامنه $D_v=(0,\sqrt{60})$ می‌باشد. با انتخاب $x=\sqrt{20}\,cm$ و در نتیجه ارتفاع برابر $h=\frac{8\sqrt{5}}{3}\,cm$ حجم بیشترین می‌شود.

۹- اگر ابعاد مکعب مستطیل را x , $2x$ و h در نظر بگیریم تابع سطح کل به صورت $s(x)=4x^2+\frac{216}{x}$ با دامنه $D_s=(0,+\infty)$ خواهد بود. با انتخاب $x=3m$ سطح کل کمترین می‌شود و داریم: $2x=6m$ ، $h=4m$

۱۰- تابع حجم به صورت $v(x)=4x(6-x)^2$ با دامنه $D_v=[0,6]$ می‌باشد. به کمک قضیه اکسترمم مطلق و با انتخاب $x=2cm$ حجم قوطی بیشترین می‌شود.

۱۱- اگر ارتفاع مخروط را h در نظر بگیریم تابع حجم به صورت $v(h)=\frac{\pi}{3}(100h-h^3)$ با دامنه $D_v=[0,10]$ می‌باشد. به کمک قضیه اکسترمم مطلق و با انتخاب $h=\frac{10\sqrt{3}}{3}\,ft$ حجم خیمه بیشترین می‌شود.

۱۲- اگر x را تعداد سفارش در نظر بگیریم، تابع درآمد به صورت زیر می‌باشد:

$$R(x)=\begin{cases}400x & x\le 100\\ x(400-0/5(x-100)) & x>100\end{cases}=\begin{cases}400x & x\le 100\\ 450x-0/5x^2 & x>100\end{cases}$$

با عملیاتی مشابه (مثال ۱۰ صفحه ۲۱۵) مشاهده می‌شود که بیشترین درآمد زمانی حاصل می‌شود که تعداد سفارش ۴۵۰ کارت باشد.

فصل پنجم: انتگرال

تمرین‌های صفحه ۲۳۱ :

۱/۱) $\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+c$

۱/۲) $\frac{2}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+x+c$

۱/۳) $\frac{-1}{u}-\frac{5}{2}u^2+c$

۱/۴) $\frac{-1}{u^2}+\frac{3}{u}+c$

۱/۵) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{z^5}+\frac{2}{3}\sqrt{z^3}+c$

۱/۶) $\frac{4}{3}\sqrt{z^3}+2\sqrt{z}+c$

۱/۷) $\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4}+c$

۱/۸) $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$

۱/۹) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{u^8}+\frac{18}{7}\sqrt[6]{u^7}+c$

۱/۱۰) $\frac{2}{5}\sqrt{u^5}+\frac{30}{\sqrt[6]{u}}+c$

۲/۱) $\frac{2}{5}(\frac{1}{2}x-2)^5+c$

۲/۲) $\frac{1}{25}(5x-3)^5+c$

۲/۳) $\frac{1}{28}(2x^2+3)^7+c$

۲/۴) $\frac{-1}{24}(5-x^3)^8+c$

۲/۵) $\frac{-1}{2(x^2+x)^2}+c$

۲/۶) $\frac{-1}{3(x^3+x)^3}+c$

۲/۷) $\frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3}+c$

۲/۸) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+4)^4}+c$

۲/۹) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+c$

۲/۱۰) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3+2)^4}+c$

۲/۱۱) $\frac{-2}{3}\sqrt{(1+\frac{1}{x})^3}+c$

۲/۱۲) $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+c$

۲/۱۳) $\frac{1}{5}\sqrt{(2x+3)^5}-\sqrt{(2x+3)^3}+c$

۲/۱۴) $\frac{1}{6}\sqrt{(2x+2)^3}-\sqrt{2x+2}+c$

۲/۱۵) $\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}+2\sqrt{x+1}+c$

۲/۱۶) $\frac{3}{10}\sqrt[3]{(x+1)^{10}}-\frac{6}{7}\sqrt[3]{(x+1)^7}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+c$

تمرین‌های صفحه ۲۳۷ :

۱/۱) $3\sin^{-1}x + c$

۱/۲) $\frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

۱/۳) $\frac{5}{2}\tan^{-1}x + c$

۱/۴) $\frac{1}{2}\sin^{-1}x + c$

۱/۵) $4\sec^{-1}|x| + c$

۱/۶) $\frac{-2}{3}\sec^{-1}|x| + c$

۱/۷) $\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c$

۱/۸) $3\sin^{-1}(\frac{x}{5}) + c$

۱/۹) $\frac{5}{2}\tan^{-1}(\frac{x}{2}) + c$

۱/۱۰) $\frac{4}{\sqrt{5}}\tan^{-1}(\frac{x}{\sqrt{5}}) + c$

۱/۱۱) $\frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{2x}{3}) + c$

۱/۱۲) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(\frac{2x}{3}) + c$

۱/۱۳) $\frac{5}{2}\tan^{-1}(\frac{x+3}{2}) + c$

۱/۱۴) $2\sin^{-1}(\frac{x+3}{2}) + c$

۱/۱۵) $\sin^{-1}(\frac{x+1}{3}) + c$

۱/۱۶) $\frac{1}{4}\tan^{-1}(\frac{2x+1}{2}) + c$

۱/۱۷) $-\tan^{-1}(\cos x) +$

۱/۱۸) $\sin^{-1}(\frac{\sin x}{2}) + c$

۱/۱۹) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2) + c$

۱/۲۰) $2\tan^{-1}\sqrt{x} + c$

۲/۱) $\frac{-1}{5}e^{2-5x} + c$

۲/۲) $\frac{-1}{2}e^{4-x^2} + c$

۲/۳) $\frac{-1}{\ln 2}2^{\cos x} + c$

۲/۴) $\frac{-1}{2\ln 5}5^{3-2x} + c$

۲/۵) $\frac{-1}{2}\ln|3-2x| + c$

۲/۶) $\frac{5}{3}\ln|4+3x| + c$

۲/۷) $\frac{1}{3}\ln|x^3+1| + c$

۲/۸) $\frac{3}{2}\ln|x^2+4| + c$

۲/۹) $\frac{-1}{2}\ln|\cos 2x| + c$

۲/۱۰) $\frac{1}{7}\ln|\sin 7x| + c$

۲/۱۱) $\frac{1}{2}\ln|1+2\sin x| + c$

۲/۱۲) $\frac{1}{\ln 5}\ln|5^x+1| + c$

۳/۱) $\frac{-1}{4}\cos 4x + c$

۳/۲) $\frac{1}{3}\sin 3x + c$

۳/۳) $2\sin(\frac{x}{2}) + c$

۳/۴) $-3\cos(\frac{x}{3}) + c$

۳/۵) $2\sin\sqrt{x} + c$

۳/۶) $\cos(\frac{1}{x}) + c$

۳/۷) $-\frac{1}{3}\cos(x^3-1) + c$

۳/۸) $\frac{-3}{2}\sin(2-x^2) + c$

۳/۹) $\frac{1}{3}\tan 3x + c$

۳/۱۰) $\frac{-1}{5}\cot 5x + c$

۳/۱۱) $\frac{1}{2}\tan 2x + c$

۳/۱۲) $\frac{-1}{2}\cot(x^2) + c$

۳/۱۳) $\frac{-1}{2}\csc(2x+3) + c$

۳/۱۴) $-\sec(2-x) + c$

۳/۱۵) $-2\sqrt{5+\cos x} + c$

۳/۱۶) $\frac{1}{4}(2+\sin x)^4 + c$

۳/۱۷) $\frac{1}{20}(\sin 5x)^4 + c$

۳/۱۸) $\frac{1}{4\cos 4x} + c$

۴/۱) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$

۴/۲) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}\sin 8x + c$

۴/۳) $\frac{-1}{4}\cos 4x + \frac{1}{12}(\cos 4x)^3 + c$

۴/۴) $\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}(\sin 2x)^3 + c$

۴/۵) $\frac{1}{4}(\sec 2x)^2 + c$

۴/۶) $\frac{-1}{6}\csc^2 3x + c$

۴/۷) $-\cot x - x + c$

۴/۸) $\frac{1}{2}\tan 2x - x + c$

۴/۹) $\frac{-1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

۴/۱۰) $\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + c$

۵/۱) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}$

۵/۲) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + 1$

۵/۳) $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - 5$

۵/۴) $f(x) = \frac{-1}{2}\cos x^2 + \frac{5}{2}$

۵/۵) $f(x) = -\sin x + 2x + 1$

۵/۶) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$

۲/۱۳) $\ln|\ln x| + c$

۲/۱۴) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$

۲/۱۵) $\frac{-1}{2}e^{-2x} - e^{-x} + c$

۲/۱۶) $\frac{1}{\ln(9e)}(9e)^x + c$

۲/۱۷) $\sin^{-1}(\ln x) + c$

۲/۱۸) $\tan^{-1}(e^x) + c$

۳/۱) $\frac{1}{2}\cosh(x^2+1) + c$

۳/۲) $\frac{1}{3}\sinh(4+x^3) + c$

۳/۳) $-\sinh(\frac{1}{x}) + c$

۳/۴) $2\cosh\sqrt{x} + c$

۳/۵) $\frac{1}{3}\tanh(x^3+1) + c$

۳/۶) $\coth(x^2+x) + c$

۴/۱) $f(x) = \sin^{-1}x + \frac{\pi}{6}$

۴/۲) $f(x) = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{x}{2}) + \frac{\pi}{24}$

۴/۳) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x-1} + \frac{3}{2}$

۴/۴) $f(x) = \ln|x+3| + 1$

۴/۵) $f(x) = \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{3}{2}$

۴/۶) $f(x) = 2\sinh(\frac{x}{2}) - 1$

تمرین‌های صفحه ۲۴۵ :

۱/۱) $\frac{-1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

۱/۲) $x\sin x + \cos x + c$

۱/۳) $x(\ln x - 1) + c$

۱/۴) $\frac{1}{2}x^2\ln(3x) - \frac{1}{4}x^2 + c$

۱/۵) $\frac{1}{9}e^{3x}(3x-1) + c$

۱/۶) $-2e^{-x}(x+1) + c$

۱/۷) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$

۱/۸) $\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2 - 2x + 1) + c$

۱/۹) $x\cot^{-1}x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$

۱/۱۰) $x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

۱/۱۱) $2\sqrt{x}\tan^{-1}\sqrt{x} - \ln|1+x| + c$

۱/۱۲) $\sin x(\ln(\sin x) - 1) + c$

۱/۱۳) $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$

۱/۱۴) $\frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

۲/۱) $5x - 13\ln|x+2| + c$

۲/۲) $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 4\ln|x-1| + c$

۲/۳) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{x}{2}) + c$

۲/۴) $\frac{1}{3}x^3 + 3x - \frac{53}{3}\tan^{-1}(\frac{x}{3}) + c$

۲/۵) $-\ln|x| + \ln|x-4| + c$

۲/۶) $2\ln|x-2| + 3\ln|x+2| + c$

۲/۷) $2\ln|x| + \ln|x-2| - \ln|x+2| + c$

۲/۸) $\ln|x| + 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + c$

۲/۹) $\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x+1| + c$

۲/۱۰) $\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$

۲/۱۱) $\ln|x-1| + \tan^{-1}x + c$

۲/۱۲) $2\ln|x| - \tan^{-1}x + c$

تمرین‌های صفحه ۲۵۰ :

۱/۱) $2\sin^{-1}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + c$

۱/۲) $2\sin^{-1}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2} + c$

۱/۳) $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c$

۱/۴) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x}\right| + c$

۱/۵) $\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c$

۱/۶) $\frac{1}{54}\cos^{-1}(\frac{3}{x}) + \frac{1}{18}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} + c$

۲/۱) $\frac{1}{5}\ln\left|2\tan(\frac{x}{2}) - 1\right| - \frac{1}{5}\ln\left|\tan(\frac{x}{2}) + 2\right| + c$

۲/۲) $-\ln\left|1 - \tan(\frac{x}{2})\right| + c$

$۲/۳)\ ln\left|tan(\frac{x}{۲})\right|+c=ln|csc\,x-cot\,x|+c$ $\quad ۲/۴)\ \frac{-۲}{tan(\frac{x}{۲})+۱}+c$

$۲/۵)\ ln\left|۱+tan^{۲}(\frac{x}{۲})\right|+c=-ln|۱+cos\,x|+c'$

$۲/۶)\ x-tan(\frac{x}{۲})+c$

$۲/۷)\ \frac{۱}{۲}ln\left|tan(\frac{x}{۲})\right|-\frac{۱}{۴}\left(tan(\frac{x}{۲})\right)^{۲}+c$

$۲/۸)\ -\frac{۱}{۲}ln\left|tan(\frac{x}{۲})-۱\right|+\frac{۱}{۲}ln\left|tan(\frac{x}{۲})+۱\right|+\frac{۱}{۱+tan(\frac{x}{۲})}-\frac{۱}{\left(۱+tan(\frac{x}{۲})\right)^{۲}}+c$

$۳/۱)\ x-\frac{x^{۳}}{۳!\times۳}+\frac{x^{۵}}{۵!\times۵}-\frac{x^{۷}}{۷!\times۷}+\cdots$

$۳/۲)\ \frac{x^{۲}}{۲!\times۲}-\frac{x^{۴}}{۴!\times۴}+\frac{x^{۶}}{۶!\times۶}-\frac{x^{۸}}{۸!\times۸}+\cdots$

$۳/۳)\ x-\frac{x^{۵}}{۲!\times۵}+\frac{x^{۹}}{۴!\times۹}-\frac{x^{۱۳}}{۶!\times۱۳}+\cdots$

$۳/۴)\ \frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۷}}{۳!\times۷}+\frac{x^{۱۱}}{۵!\times۱۱}-\frac{x^{۱۵}}{۷!\times۱۵}+\cdots$

$۳/۵)\ x-\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۵}}{۲!\times۵}-\frac{x^{۷}}{۳!\times۷}+\frac{x^{۹}}{۴!\times۹}-\cdots$

$۳/۶)\ x+\frac{x^{۴}}{۴}+\frac{x^{۷}}{۲!\times۷}+\frac{x^{۱۰}}{۳!\times۱۰}+\frac{x^{۱۳}}{۴!\times۱۳}+\cdots$

فصل ششم: کاربرد انتگرال

تمرین‌های صفحه ۲۵۸ :

$۱/۱)\ ۲۵$ $\quad ۱/۲)\ ۱۲$ $\quad ۱/۳)\ \frac{۴۵}{۴}$ $\quad ۱/۴)\ \frac{۳}{۴}$ $\quad ۱/۵)\ \frac{۱۷}{۶}$

$۱/۶)\ \frac{-۱}{۶}$ $\quad ۱/۷)\ \frac{۲۹}{۶}$ $\quad ۱/۸)\ \frac{۲۳}{۱۴}$ $\quad ۱/۹)\ \frac{۷۲}{۵}$ $\quad ۱/۱۰)\ \frac{۳۰۰}{۷}$

$۱/۱۱)\ \frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ $\quad ۱/۱۲)\ \frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ $\quad ۱/۱۳)\ ۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ $\quad ۱/۱۴)\ \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ $\quad ۱/۱۵)\ ۱$

$۱/۱۶)\ \sqrt{۲}-۲$ $\quad ۱/۱۷)\ \frac{\pi}{۶}$ $\quad ۱/۱۸)\ \frac{\pi}{۱۲}$ $\quad ۱/۱۹)\ ۳$ $\quad ۱/۲۰)\ ۶$

$۱/۲۱)\ \frac{۳}{ln\,۲}$ $\quad ۱/۲۲)\ \frac{۲۴}{۲۵\,ln\,۵}$ $\quad ۱/۲۳)\ -۳\,ln\,۲$ $\quad ۱/۲۴)\ ۴$

$۲/۱)\ \frac{۷}{۳}$ $\quad ۲/۲)\ \frac{۵}{۲}$ $\quad ۲/۳)\ ۲$

$۲/۴)\ ۱$ $\quad ۲/۵)\ ۲-\frac{\pi^{۲}}{۲}$ $\quad ۲/۶)\ ۲$

$۳/۱)\ ۰$ $\quad ۳/۲)\ \frac{۲}{۵}$ $\quad ۳/۳)\ \frac{۲۶}{۳}$ $\quad ۳/۴)\ ۱۲$

$۳/۵)\ \frac{۳}{۴}(۴-\sqrt[۳]{۴})$ $\quad ۳/۶)\ \frac{۷}{۳}$ $\quad ۳/۷)\ \frac{۴۶}{۱۵}$ $\quad ۳/۸)\ \frac{۱۰۴}{۵}$

$۳/۹)\ \frac{۲}{۳}$ $\quad ۳/۱۰)\ \frac{-\sqrt{۲}}{۴}$ $\quad ۳/۱۱)\ \frac{\pi}{۱۲}$ $\quad ۳/۱۲)\ \frac{\pi-۲}{۱۶}$

$۳/۱۳)\ \frac{ln\,۲}{۲}$ $\quad ۳/۱۴)\ \frac{ln\,۲}{۲}$ $\quad ۳/۱۵)\ \frac{\pi}{۴}$ $\quad ۳/۱۶)\ \frac{\pi}{۱۲}$

$۳/۱۷)\ \frac{ln\,۵}{۲}$ $\quad ۳/۱۸)\ ۲\,ln\,۲$ $\quad ۳/۱۹)\ ln\,۲$ $\quad ۳/۲۰)\ ln\,۳$

$۳/۲۱)\ \frac{۱}{۳}(e^{۷}-۱)$ $\quad ۳/۲۲)\ \frac{۱}{۵}(e-e^{-۳})$ $\quad ۳/۲۳)\ \frac{۷}{ln\,۲}$ $\quad ۳/۲۴)\ \frac{۲۴}{۵\,ln\,۵}$

$۳/۲۵)\ \frac{۱}{۴}(e^{۲}+۱)$ $\quad ۳/۲۶)\ \frac{۸-\sqrt{۲}(\pi-۴)}{۸}$ $\quad ۳/۲۷)\ \frac{۱}{۲}(۲ln\,۳-ln\,۵)$

$۳/۲۸)\ ln\,۲+tan^{-۱}\,۴-tan^{-۱}\,۲$

تمرین‌های صفحه ۲۶۵ :

$۱/۱)\ \frac{۱}{۴}\left(۰+\frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}}+۲+\frac{۳}{\sqrt{۲}}+\sqrt{۲}\right)=۱/۸۵۱۵$

$۱/۲)\ \frac{۱}{۴}\left(۱+\frac{۳۲}{۱۷}+۱+\frac{۳۲}{۹۷}+\frac{۱}{۱۷}\right)=۱/۰۶۷۸$

$۱/۳)\ \frac{\pi}{۱۶}\left(۰+\sqrt{\frac{\pi}{۲}}cos\frac{\pi}{۸}+\sqrt{\pi}\,cos\frac{\pi}{۴}+\sqrt{\frac{۳\pi}{۲}}cos\frac{۳\pi}{۸}+۰\right)=۰/۶۳۶۶$

$۱/۴)\ \frac{\pi}{۱۶}\left(\frac{۲}{\pi}+\frac{۱۶}{۵\pi}sin(\frac{۵\pi}{۸})+\frac{۸}{۳\pi}sin(\frac{۳\pi}{۴})+\frac{۱۶}{۷\pi}sin(\frac{۷\pi}{۸})+۰\right)=۰/۴۸۲۲$

۲/۱) $\int_{-۱}^{۱}(x^۲-\frac{۱}{۶}x^۶+\frac{۱}{۱۲۰}x^{۱۰})dx=\frac{۲۸۶۷}{۴۶۲۰}=۰/۶۲۰۵$

۲/۲) $\int_{۰}^{۱}(۱-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲۴}x^۲)dx=\frac{۵۵}{۷۲}=۰/۷۶۳۸$

۲/۳) $\int_{۱}^{۲}(\frac{۱}{x}+۱+\frac{۱}{۲}x)dx=\frac{۷}{۴}+\ln ۲=۲/۴۴۳۲$

۲/۴) $\int_{۰}^{۱}(۱+x^۳+\frac{۱}{۲}x^۶)dx=\frac{۳۷}{۲۸}=۱/۳۲۱۴$

۳/۱) ۲/۰۷۳۶ ۳/۲) ۶/۶۴۵۳ ۳/۳) ۲/۰۲۷۲ ۳/۴) ۲/۳۴۳۲

۴/۱) $g'(x)=\sqrt{x^۳+۱}$ ۴/۲) $f'(t)=\sin(t^۲)$

۴/۳) $f'(t)=\frac{-۱}{t^۴+۱}$ ۴/۴) $g'(x)=\frac{-x^۲}{\sqrt{x^۲+۳}}$

۴/۵) $h'(x)=\frac{x}{۲\sqrt{x}(x+۱)}$ ۴/۶) $h'(x)=\frac{۲\sin(x^۲)}{x}$

۴/۷) $f'(x)=\frac{-۱}{x^۲}\sin^۴(\frac{۱}{x})$ ۴/۸) $f'(t)=(۱+\tan^۲ t)^۲$

تمرین‌های صفحه ۲۷۴ :

۱/۱) $S=\int_{-۲}^{\frac{۱}{۲}}(۱-۲x)\,dx=\frac{۲۵}{۴}$

۱/۲) $S=-\int_{۰}^{۴}(x^۲-۴x)dx=\frac{۳۲}{۳}$

۱/۳) $S=s_۱+s_۲=۲s_۲=۲\int_{۱}^{۲}(x-۱)^۳dx=\frac{۱}{۲}$

۱/۴) $S=s_۱+s_۲=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}}\cos x\,dx=۳+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱/۵) $S=\int_{۰}^{۳}\frac{۱}{x+۱}dx=۲\ln ۲$ ۱/۶) $S=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\tan x\,dx=\frac{۱}{۲}\ln ۲$

۱/۷) $y=\ln x\to x=e^y$, $S=\int_a^b f(y)\,dy=\int_{۰}^{e}e^y\,dy=e^e-۱$

۱/۸) $S=s_۱+s_۲=\int_{۰}^{۱}x^۲dx+\int_{۱}^{۴}\sqrt{x}\,dx=۵$

۲/۱) $S=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}((x+۱)-\sin x)\,dx=\frac{\pi^۲}{۸}+\frac{\pi}{۲}-۱$

۲/۲) $S=\int_{۰}^{۱}(e^x-\sqrt{x})dx=e-\frac{۵}{۳}$

۲/۳) $S=\int_{-۱}^{۲}((x+۲)-x^۲)\,dx=\frac{۹}{۲}$

۲/۴) $S=\int_{۰}^{۲}((۴x-x^۲)-x^۲)\,dx=\frac{۸}{۳}$

۲/۵) $S=s_۱+s_۲=۲s_۲=۲\int_{۰}^{۱}(x-x^۳)\,dx=\frac{۱}{۲}$

۲/۶) $S=s_۱+s_۲=۲s_۲=۲\int_{۰}^{۱}(x-x^۳)dx=\frac{۱}{۲}$

۲/۷) $S=\int_{۱}^{e}(x-\ln x)\,dx=\frac{e^۲-۳}{۲}$

۲/۸) $S=s_۱+s_۲=\int_{-\frac{۴}{۳}}^{۰}((۴-x)-(-۴x))\,dx+\int_{۰}^{۱}((۴-x)-(۳x))\,dx$

$=\frac{۸}{۳}+۲=\frac{۱۴}{۳}$

تمرین‌های صفحه ۲۸۳ :

۱/۱) $V=\pi\int_{-۱}^{۲}(x^۲+۱)^۲\,dx=\frac{۷۸\pi}{۵}$

۱/۲) $V=\pi\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۲ x\,dx=\frac{\pi^۲}{۲}$

۱/۳) $V=\pi\int_{۱}^{۴}(\frac{۱}{x})^۲\,dx=\frac{۳\pi}{۴}$

۱/۴) $V=\pi\int_{-۱}^{۲}(e^{-x})^۲\,dx=\frac{\pi}{۲}(e^۲-e^{-۴})$

۱/۵) $V=\pi\int_{۰}^{۳}\left(\sqrt{۴-(x-۱)^۲}\right)^۲\,dx=۹\pi$

۱/۶) $V=v_۱+v_۲=\pi\int_{-۱}^{۰}(\sqrt{-x})^۲\,dx+\pi\int_{۰}^{۴}(\sqrt{x})^۲\,dx=\frac{۱۷\pi}{۲}$

۱/۷) $V=\pi\int_{۰}^{\frac{۵}{۳}}(\frac{۵-۳y}{۲})^۲\,dy=\frac{۱۲۵\pi}{۳۶}$

۱/۸) $V = \pi \int_{۰}^{ln ۴} (e^y)^۲ \, dy = \frac{۱۵\pi}{۲}$

۲/۱) $V = \pi \int_{۰}^{۴} (۲^۲ - (\sqrt{x})^۲) \, dx = ۸\pi$

۲/۲) $V = \pi \int_{-۲}^{۲} (۳^۲ - (\frac{۱}{۲}x^۲ + ۱)^۲) \, dx = \frac{۳۵۲\pi}{۱۵}$

۲/۳) $V = \pi \int_{۰}^{\pi} ((۱ + sin\, x)^۲ - sin^۲ x) \, dx = \pi^۲ + ۴\pi$

۲/۴) $V = \pi \int_{۰}^{ln ۴} ((e^x)^۲ - (e^{-x})^۲) \, dx = \frac{۲۲۵\pi}{۳۲}$

۲/۵) $V = \pi \int_{۰}^{۱} ((\sqrt{x})^۲ - (x^۳)^۲) \, dx = \frac{۵\pi}{۱۴}$

۲/۶) $V = \pi \int_{-۲}^{۱} (۳^۲ - (\sqrt{۴ - x^۲})^۲) \, dx = ۱۸\pi$

۲/۷) $V = v_۱ + v_۲ = \pi \int_{\frac{۱}{۸}}^{\frac{۱}{۲}} \left((۴x)^۲ - (\frac{۱}{۲})^۲\right) dx + \pi \int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} \left((\frac{۱}{x})^۲ - (\frac{۱}{۲})^۲\right) dx = \frac{۲۷\pi}{۱۶}$

۲/۸) $V = v_۱ + v_۲ = \pi \int_{-۲}^{-۱} ((x^۲ + ۱)^۲ - (x + ۳)^۲) \, dx$

$$+ \pi \int_{-۱}^{۲} ((x + ۳)^۲ - (x^۲ + ۱)^۲) \, dx = \frac{۴۹۴\pi}{۱۵}$$

۳) از دوران سطح محصور بین منحنی‌های $x = \sqrt{۶۴ - y^۲}$ و $x = ۰$ و $y = ۳$ حول محور yها، حجم مخزن را می‌توان به‌دست آورد.

$$V = \pi \int_{-۸}^{۳} (\sqrt{۶۴ - y^۲})^۲ \, dy = \frac{۱۵۷۳\pi}{۳}$$

۴) ابتدا معادله یک سهمی که از نقاط $(-۴,۲)$ ، $(۰,۱)$ و $(۲,\frac{۵}{۴})$ می‌گذرد را به‌دست آورید (مشابه مثال ۲۱ صفحه ۲۷۹) سپس از دوران سطح محصور این سهمی و خطوط $x = -۴$ و $x = ۲$ و $y = ۰$ حول محور xها، حجم این قطعه به‌دست می‌آید.

$$V = \pi \int_{-۴}^{۲} (\frac{۱}{۱۶}x^۲ + ۱)^۲ \, dx = \frac{۳۹۳\pi}{۴۰} = ۳۰/۸۶$$

تمرین‌های صفحه ۲۸۹ :

۱/۱) $L = \int_{۰}^{۲} \sqrt{۱ + (-۲)^۲} \, dx = ۲\sqrt{۵}$

۱/۲) $L = \int_{۰}^{۴} \sqrt{۱ + (\frac{۳}{۲}\sqrt{x})^۲} \, dx = \frac{۸(۱۰\sqrt{۱۰} - ۱)}{۲۷}$

۱/۳) $L = \int_{۳}^{۶} \sqrt{۱ + (\frac{۳}{۲}\sqrt{x - ۲})^۲} \, dx = \frac{۸۰\sqrt{۱۰} - ۱۳\sqrt{۱۳}}{۲۷}$

۱/۴) $L = \int_{۰}^{۲} \sqrt{۱ + (\frac{-x}{\sqrt{۴ - x^۲}})^۲} \, dx = \pi$

۱/۵) $L = \int_{۰}^{۳} \sqrt{۱ + (۲x\sqrt{x^۲ + ۱})^۲} \, dx = ۲۱$

۱/۶) $L = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \sqrt{۱ + (-tan\, x)^۲} \, dx = ln(\sqrt{۲} + ۱)$

۲/۱) $L = \int_{-۱}^{۲} \sqrt{۱ + (۲x)^۲} \, dx = ۶/۱۲۵۷$

۲/۲) $L = \int_{۱}^{۴} \sqrt{۱ + (\frac{۱}{x})^۲} \, dx = ۳/۳۴۲۸$

۲/۳) $L = \int_{۰}^{\frac{۲\pi}{۵}} \sqrt{۱ + (۱ + tan^۲ x)^۲} \, dx = ۳/۴۲۰۱$

۲/۴) $L = \int_{۰}^{۲\pi} \sqrt{۱ + (cos\, x)^۲} \, dx = ۷/۶۴۰۰$

۳/۱) $A = ۲\pi \int_{-۱}^{\frac{۱}{۲}} (۳ - ۲x)\sqrt{۱ + (-۲)^۲} \, dx = \frac{۲۱\sqrt{۵}\pi}{۲}$

۳/۲) $A = ۲\pi \int_{۱}^{۳} \frac{۱}{۳}x^۳ \sqrt{۱ + (x^۲)^۲} \, dx = \frac{۲\sqrt{۲}\pi}{۹}(۴۱\sqrt{۴۱} - ۱)$

۳/۳) $A = ۲\pi \int_{۰}^{۱} \sqrt{۴ - x^۲} \sqrt{۱ + (\frac{-x}{\sqrt{۴ - x^۲}})^۲} \, dx = ۴\pi$

۳/۴) $A = ۲\pi \int_{۰}^{۳/۷۵} \sqrt{x} \sqrt{۱ + (\frac{۱}{۲\sqrt{x}})^۲} \, dx = \frac{۲۱\pi}{۲}$

۴) سطح یک کره به شعاع r، از دوران نیم دایره $y = \sqrt{r^۲ - x^۲}$ حول محور xها پدید می‌آید. پس داریم:

$$A = ۲\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^۲ - x^۲} \sqrt{۱ + (\frac{-x}{\sqrt{r^۲-x^۲}})^۲}\, dx = ۴\pi r^۲$$

تمرین‌های صفحه ۲۹۸:

۱/۱) $+\infty$ واگرا — ۱/۲) ۲ همگرا — ۱/۳) $-\infty$ واگرا

۱/۴) $\frac{۱}{۲}$ همگرا — ۱/۵) $\frac{۱}{۲e^۲}$ همگرا — ۱/۶) $+\infty$ واگرا

۱/۷) $+\infty$ واگرا — ۱/۸) $\frac{\pi}{۲}$ همگرا — ۱/۹) $+\infty$ واگرا

۱/۱۰) ۰ همگرا — ۱/۱۱) واگرا زیرا انتگرال موجود نیست — ۱/۱۲) واگرا زیرا انتگرال موجود نیست

۲/۱) $+\infty$ واگرا — ۲/۲) -۶ همگرا — ۲/۳) $\frac{۵}{۳}$ همگرا

۲/۴) $+\infty$ واگرا — ۲/۵) $+\infty$ واگرا — ۲/۶) $\frac{\pi}{۲}$ همگرا

۲/۷) واگرا زیرا انتگرال موجود نیست — ۲/۸) $+\infty$ واگرا — ۲/۹) ۲ همگرا

۲/۱۰) $\frac{۵}{۲}$ همگرا — ۲/۱۱) ۳ همگرا — ۲/۱۲) ۳ همگرا

۲/۱۳) $+\infty$ واگرا — ۲/۱۴) $+\infty$ واگرا

۳/۱) همگرا (مقایسه با: $\int_۱^{+\infty} \frac{۱}{e^x} dx = \frac{۱}{e}$) ۳/۲) همگرا (مقایسه با: $\int_۰^{+\infty} \frac{۱}{x^۲+۱} dx = \frac{\pi}{۲}$)

۳/۳) همگرا (مقایسه با: $\int_۱^{+\infty} \frac{۱}{x^۲} dx = \frac{۱}{۲}$) ۳/۴) همگرا (مقایسه با: $\int_۱^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{x^۳}} dx = ۲$)

۳/۵) واگرا (مقایسه با: $\int_۰^{+\infty} \frac{۱}{x+۲} dx = +\infty$) ۳/۶) واگرا (مقایسه با: $\int_۲^{+\infty} \frac{۱}{x} dx = +\infty$)

فصل هفتم: اعداد مختلط

تمرین‌های صفحه ۳۱۱:

۱/۱) $۸ - ۴i$ — ۱/۲) $۲ + ۴i$ — ۱/۳) $۱۹ - ۴i$

۱/۴) $۱۱ - ۱۶i$ — ۱/۵) $\frac{۱۹}{۱۳} + \frac{۴}{۱۳}i$ — ۱/۶) $\frac{۱۹}{۲۹} - \frac{۴}{۲۹}i$

۱/۷) $۲۱ - ۲۰i$ — ۱/۸) $-۹ - ۴۶i$ — ۱/۹) $\frac{۱۵۲+۸۴i}{۳۷۷}$

۱/۱۰) $\frac{۶۸-۲۸i}{۱۳}$

۲/۱) $e^{\frac{۳\pi}{۲}i}$ — ۲/۲) $e^{\pi i}$ — ۲/۳) $۲\sqrt{۲}\, e^{-\frac{\pi}{۴}i}$

۲/۴) $۲\sqrt{۲}\, e^{\frac{۵\pi}{۴}i}$ — ۲/۵) $۲e^{-\frac{\pi}{۶}i}$ — ۲/۶) $۲e^{\frac{۵\pi}{۶}i}$

۳/۱) $\frac{-۳\sqrt{۲}}{۲} + \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}i$ — ۳/۲) $-۲ - ۲\sqrt{۳}i$ — ۳/۳) -۲

۳/۴) $-۳i$ — ۳/۵) $-\sqrt{۳} + i$ — ۳/۶) $\frac{-۵}{۲} + \frac{۵\sqrt{۳}}{۲}i$

۴/۱) ۱ — ۴/۲) $۳ - ۲i$ — ۴/۳) $(\frac{۲\sqrt{۳}-۳}{۲}) + (\frac{۲+۳\sqrt{۳}}{۲})i$

۴/۴) $\frac{-۱}{۲} - \frac{۲+۵\sqrt{۳}}{۲}i$ — ۴/۵) $۶i$ — ۴/۶) $۲\sqrt{۳} + ۲i$

۴/۷) $۸i$ — ۴/۸) ۱۶ — ۴/۹) $۲^۹(-۱ - \sqrt{۳}i)$

۴/۱۰) $۲^{۱۲}$ — ۴/۱۱) $\frac{۱}{۸} - \frac{\sqrt{۳}}{۸}i$ — ۴/۱۲) -۱

۴/۱۳) $\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}i$ — ۴/۱۴) $۲^۶(-۱ + \sqrt{۳}i)$

۵/۱) $۳ + ۳\sqrt{۳}i$ — ۵/۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲}i$

۵/۳) $-۱۸+۱۸\sqrt{۳}i$

۵/۴) $-۲۱۶(\sqrt{۲}+\sqrt{۲}i)$

۵/۵) $(\ln ۲)+\frac{\pi}{۴}i$

۵/۶) $(\ln ۳)+\frac{\pi}{۱۲}i$

۶/۱) $۱\pm i$

۶/۲) $-۲\pm i$

۶/۳) $-۳i\,,\,i$

۶/۴) $\frac{(-۲+\sqrt{۳})-i}{۲}\,,\,\frac{(-۲-\sqrt{۳})-i}{۲}$

۶/۵) $۳\,,\,\frac{-۳\pm ۳\sqrt{۳}i}{۲}$

۶/۶) $-۲\,,\,۱\pm\sqrt{۳}i$

۶/۷) $۱\,,\,-۱\pm ۳i$

۶/۸) $۲\,,\,\pm ۲i$

۶/۹) $\pm ۱\,,\,\pm\sqrt{۳}i$

۶/۱۰) $\pm i\,,\,\pm\sqrt{۳}i$

۷/۱) $e^{\frac{\pi}{۴}i}\,,\,e^{\frac{۵\pi}{۴}i}$

۷/۲) $۲e^{\frac{\pi}{۳}i}\,,\,۲e^{\pi i}\,,\,۲e^{\frac{۵\pi}{۳}i}$

۷/۳) $\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{\pi}{۱۶}i}\,,\,\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۹\pi}{۱۶}i}\,,\,\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۱۷\pi}{۱۶}i}\,,\,\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۲۵\pi}{۱۶}i}$

۷/۴) $\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۷\pi}{۱۶}i}\,,\,\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۱۵\pi}{۱۶}i}\,,\,\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۲۳\pi}{۱۶}i}\,,\,\sqrt[۸]{۲}\,e^{\frac{۳۱\pi}{۱۶}i}$

۷/۵) $۲e^{\frac{\pi}{۵}i}\,,\,۲e^{\frac{۳\pi}{۵}i}\,,\,۲e^{\pi i}\,,\,۲e^{\frac{۷\pi}{۵}i}\,,\,۲e^{\frac{۹\pi}{۵}i}$

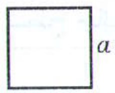
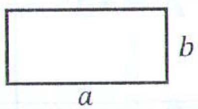
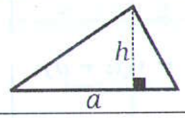
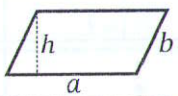
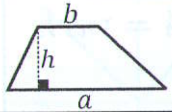
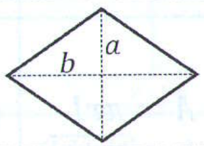
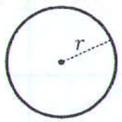
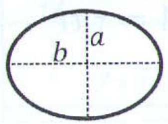
۷/۶) $\sqrt[۴]{۲}\,e^{\frac{۵\pi}{۱۲}i}\,,\,\sqrt[۴]{۲}\,e^{\frac{۱۱\pi}{۱۲}i}\,,\,\sqrt[۴]{۲}\,e^{\frac{۱۷\pi}{۱۲}i}\,,\,\sqrt[۴]{۲}\,e^{\frac{۲۳\pi}{۱۲}i}$

۷/۷) $\sqrt[۶]{۲}\,e^{\frac{۲\pi}{۹}i}\,,\,\sqrt[۶]{۲}\,e^{\frac{۵\pi}{۹}i}\,,\,\sqrt[۶]{۲}\,e^{\frac{۸\pi}{۹}i}\,,\,\sqrt[۶]{۲}\,e^{\frac{۱۱\pi}{۹}i}\,,\,\sqrt[۶]{۲}\,e^{\frac{۱۴\pi}{۹}i}\,,\,\sqrt[۶]{۲}\,e^{\frac{۱۷\pi}{۹}i}$

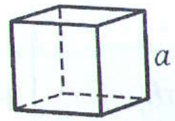
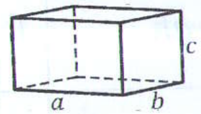
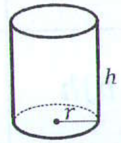
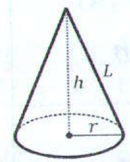
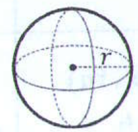
۷/۸) $e^{\frac{\pi}{۱۲}i}\,,\,e^{\frac{۵\pi}{۱۲}i}\,,\,e^{\frac{۹\pi}{۱۲}i}\,,\,e^{\frac{۱۳\pi}{۱۲}i}\,,\,e^{\frac{۱۷\pi}{۱۲}i}\,,\,e^{\frac{۲۱\pi}{۱۲}i}$

پیوست‌ها

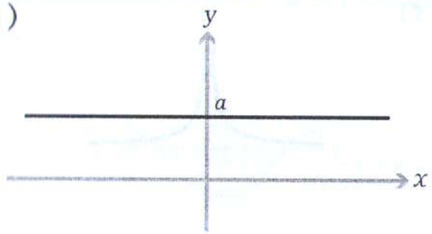
« فرمول‌های محیط و مساحت اشکال مهم هندسی »

نام	شکل	محیط	مساحت
مربع		$P=۴a$	$S=a^۲$
مستطیل		$P=۲(a+b)$	$S=ab$
مثلث		$P=$ مجموع اضلاع	$S=\frac{۱}{۲}ah$
متوازی‌الاضلاع		$P=۲(a+b)$	$S=ah$
ذوزنقه		$P=$ مجموع اضلاع	$S=\frac{۱}{۲}(a+b)h$
لوزی		$P=۲\sqrt{a^۲+b^۲}$	(a و b دو قطر لوزی) $S=\frac{۱}{۲}ab$
دایره		$P=۲\pi r$	$S=\pi r^۲$
بیضی		فرمول دقیق موجود نیست $P\cong\pi\sqrt{۲(a^۲+b^۲)}$	($۲a$ و $۲b$ دو قطر بیضی) $S=\pi ab$

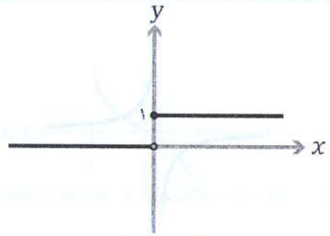
« فرمول‌های سطح و حجم اشکال مهم هندسی »

نام	شکل	سطح کل	سطح جانبی	حجم
مکعب		$S = ۶a^{۲}$	$A = ۴a^{۲}$	$V = a^{۳}$
مکعب مستطیل		$S = ۲(ab + ac + bc)$	$A = ۲(a + b)c$	$V = abc$
استوانه قائم		$S = ۲\pi(rh + r^{۲})$	$A = ۲\pi rh$	$V = \pi r^{۲}h$
مخروط دوار		$S = \pi rL + \pi r^{۲}$	$A = \pi rL$ $(L = \sqrt{h^{۲} + r^{۲}})$	$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$
کره		$S = ۴\pi r^{۲}$	$A = ۴\pi r^{۲}$	$V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$

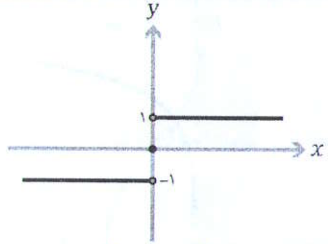
« نمودارهای مهم »

۱)


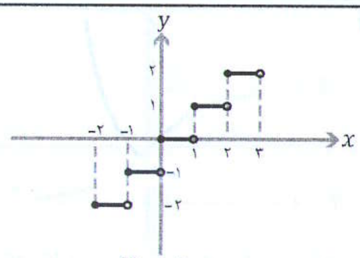
$y = a$

۲)


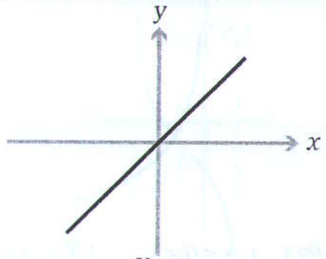
$y = u(x)$

۳)


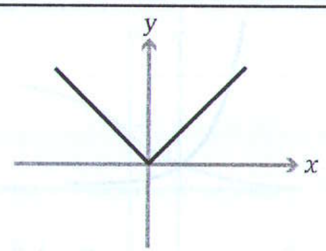
$y = sgn\ x$

۴)


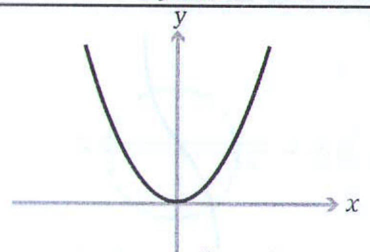
$y = [x]$

۵)


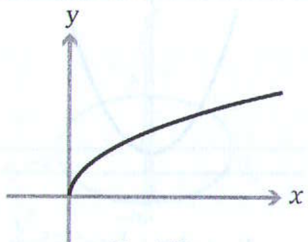
$y = x$

۶)


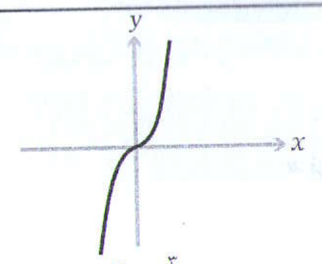
$y = |x|$

۷)


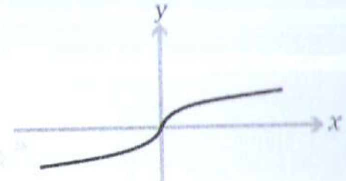
$y = x^{۲}$

۸)


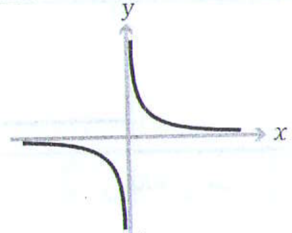
$y = \sqrt{x}$

۹)


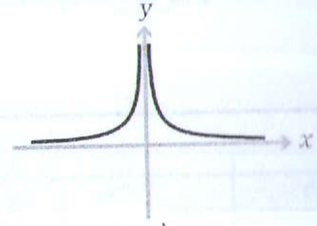
$y = x^{۳}$

۱۰)


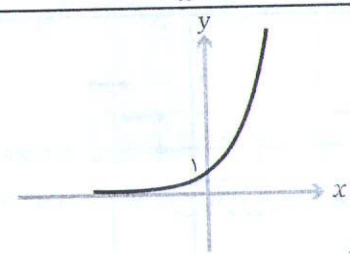
$y = \sqrt[۳]{x}$

۱۱)


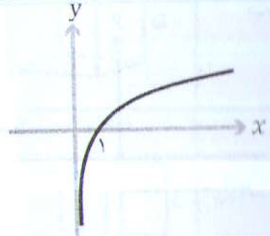
$y = \frac{۱}{x}$

۱۲)


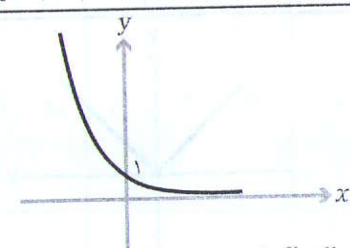
$y = \frac{۱}{x^{۲}}$

۱۳)


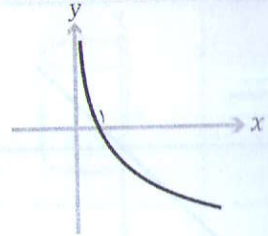
$y = a^{x}$ ، $۱ < a$ (مانند $y = e^{x}$)

۱۴)


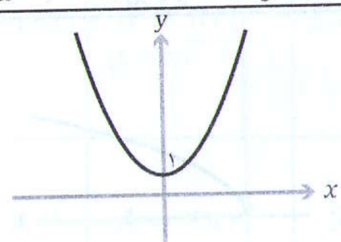
$y = Log_{a} x$ ، $۱ < a$ (مانند $y = Ln\,x$)

۱۵)


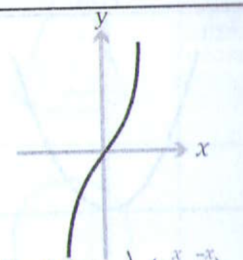
$y = a^{x}$ ، $۰ < a < ۱$ (مانند $y = (\frac{۱}{e})^{x} = e^{-x}$)

۱۶)


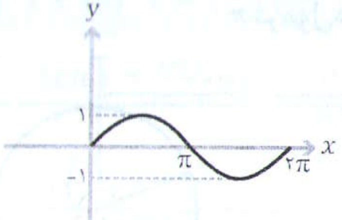
$y = Log_{a} x$ ، $۰ < a < ۱$ (مانند $y = -Ln\,x$)

۱۷)


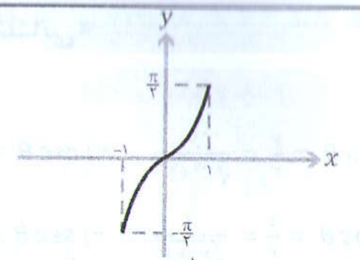
$y = \cosh x = \frac{۱}{۲}(e^{x} + e^{-x})$

۱۸)


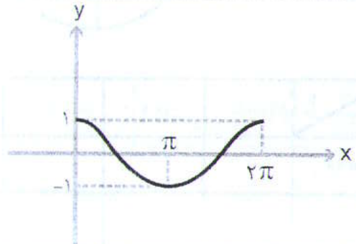
$y = \sinh x = \frac{۱}{۲}(e^{x} - e^{-x})$

۱۹)


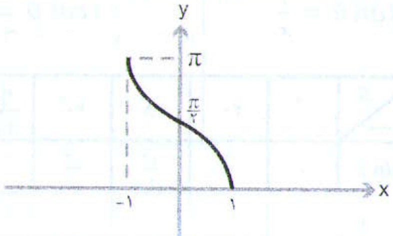
$y = \sin x \quad T = ۲\pi$

۲۰)


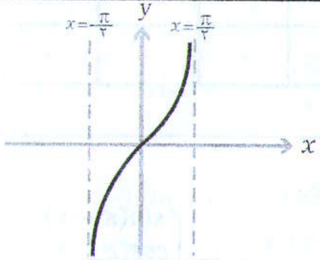
$y = \sin^{-1} x$

۲۱)


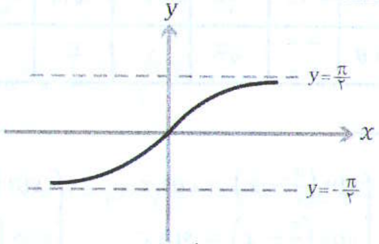
$y = \cos x \quad T = ۲\pi$

۲۲)


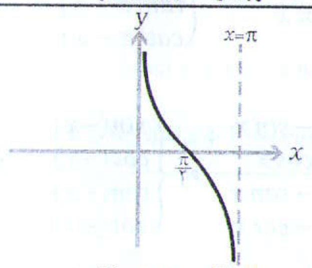
$y = \cos^{-1} x$

۲۳)


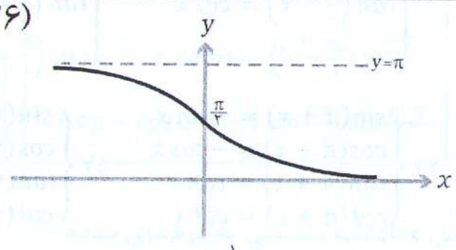
$y = \tan x \quad T = \pi$

۲۴)


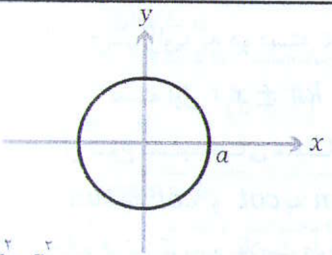
$y = \tan^{-1} x$

۲۵)


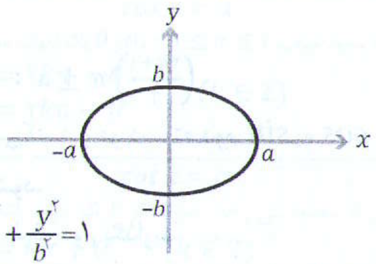
$y = \cot x \quad T = \pi$

۲۶)


$y = \cot^{-1} x$

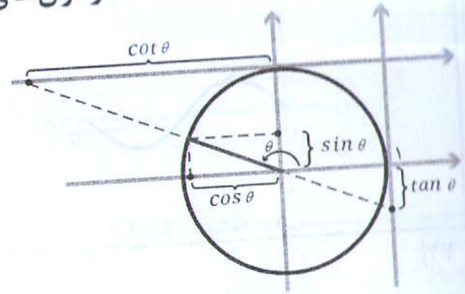
۲۷)


$x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$

۲۸)


$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$

«فرمول‌های مهم مثلثاتی»



۱) $sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$ ۲) $csc\,\theta = \frac{۱}{sin\,\theta}$

۳) $cos\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$ ۴) $sec\,\theta = \frac{۱}{cos\,\theta}$

۵) $tan\,\theta = \frac{y}{x}$ ۶) $cot\,\theta = \frac{۱}{tan\,\theta}$

نسبت \ θ	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
$sin\,\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
$cos\,\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
$tan\,\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده
$cot\,\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

نسبت \ θ	$۰^\circ < \theta < ۹۰^\circ$	$۹۰^\circ < \theta < ۱۸۰^\circ$	$۱۸۰^\circ < \theta < ۲۷۰^\circ$	$۲۷۰^\circ < \theta < ۳۶۰^\circ$
$sin\,\theta = \frac{y}{r}$	+	+	−	−
$cos\,\theta = \frac{x}{r}$	+	−	−	+
$tan\,\theta = \frac{y}{x}$	+	−	+	−
$cot\,\theta = \frac{x}{y}$	+	−	+	−

۱) $\begin{cases} sin\left(\frac{\pi}{۲}-x\right) = cos\,x \\ cos\left(\frac{\pi}{۲}-x\right) = sin\,x \\ tan\left(\frac{\pi}{۲}-x\right) = cot\,x \\ cot\left(\frac{\pi}{۲}-x\right) = tan\,x \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} sin\left(\frac{\pi}{۲}+x\right) = cos\,x \\ cos\left(\frac{\pi}{۲}+x\right) = -sin\,x \\ tan\left(\frac{\pi}{۲}+x\right) = -cot\,x \\ cot\left(\frac{\pi}{۲}+x\right) = -tan\,x \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} sin(\pi-x) = sin\,x \\ cos(\pi-x) = -cos\,x \\ tan(\pi-x) = -tan\,x \\ cot(\pi-x) = -cot\,x \end{cases}$

۴) $\begin{cases} sin(\pi+x) = -sin\,x \\ cos(\pi+x) = -cos\,x \\ tan(\pi+x) = tan\,x \\ cot(\pi+x) = cot\,x \end{cases}$ ۵) $\begin{cases} sin(۲\pi-x) = -sin\,x \\ cos(۲\pi-x) = cos\,x \\ tan(۲\pi-x) = -tan\,x \\ cot(۲\pi-x) = -cot\,x \end{cases}$ ۶) $\begin{cases} sin(-x) = -sin\,x \\ cos(-x) = cos\,x \\ tan(-x) = -tan\,x \\ cot(-x) = -cot\,x \end{cases}$

نکته: برای حفظ کردن و استفاده سریع از فرمول‌های فوق، می‌توانید به روش زیر عمل کنید:

۱- فرمول‌ها را بر حسب زاویه به دو دسته تقسیم کنید:

دسته اول: $k\pi \pm x$ ، دسته دوم: $\left(\frac{۲k+۱}{۲}\right)\pi \pm x$

۲- در دسته اول نوع نسبت‌های مثلثاتی تغییر نمی‌کند و در دسته دوم sin به cos، cos به sin، tan به cot و cot به tan تبدیل می‌شود.

۳- زاویه x را حاده فرض کرده و علامت طرف اول را برای طرف دوم بگذارید.

$sin^۲ x + cos^۲ x = ۱$, $sin^۲ x = ۱ - cos^۲ x$, $cos^۲ x = ۱ - sin^۲ x$

$tan\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}$, $cot\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x}$, $tan\,x\ cot\,x = ۱$

$۱ + tan^۲ x = \frac{۱}{cos^۲ x} = sec^۲ x$, $۱ + cot^۲ x = \frac{۱}{sin^۲ x} = csc^۲ x$

$$\boxed{\begin{aligned} sin(a \pm b) &= sin\,a\,cos\,b \pm cos\,a\,sin\,b \\ cos(a \pm b) &= cos\,a\,cos\,b \mp sin\,a\,sin\,b \\ tan(a \pm b) &= \frac{tan\,a \pm tan\,b}{۱ \mp tan\,a\,tan\,b} \end{aligned}}$$

$sin\,۲x = ۲\,sin\,x\,cos\,x$, $tan\,۲x = \frac{۲\,tan\,x}{۱ - tan^۲ x}$

$cos\,۲x = cos^۲ x - sin^۲ x$, $cos\,۲x = ۱ - ۲sin^۲ x$, $cos\,۲x = ۲cos^۲ x - ۱$

$sin^۲ x = \frac{۱ - cos\,۲x}{۲}$, $cos^۲ x = \frac{۱ + cos\,۲x}{۲}$

$$\boxed{\begin{aligned} sin\,a\,cos\,b &= \tfrac{۱}{۲}[sin(a+b) + sin(a-b)] \\ cos\,a\,sin\,b &= \tfrac{۱}{۲}[sin(a+b) - sin(a-b)] \\ cos\,a\,cos\,b &= \tfrac{۱}{۲}[cos(a+b) + cos(a-b)] \\ sin\,a\,sin\,b &= -\tfrac{۱}{۲}[cos(a+b) - cos(a-b)] \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} sin\,p + sin\,q &= ۲\,sin\tfrac{p+q}{۲}\,cos\tfrac{p-q}{۲} \\ sin\,p - sin\,q &= ۲\,cos\tfrac{p+q}{۲}\,sin\tfrac{p-q}{۲} \\ cos\,p + cos\,q &= ۲\,cos\tfrac{p+q}{۲}\,cos\tfrac{p-q}{۲} \\ cos\,p - cos\,q &= -۲\,sin\tfrac{p+q}{۲}\,sin\tfrac{p-q}{۲} \end{aligned}}$$

حل معادلات مثلثاتی به فرم‌های ساده :

$\mathbf{sin\,x = a}$	$\mathbf{cos\,x = a}$
شرط وجود جواب: $-۱ \le a \le ۱$ ، اگر θ یک جواب باشد: $\begin{cases} x = ۲k\pi + \theta \\ x = ۲k\pi + \pi - \theta \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$	شرط وجود جواب: $-۱ \le a \le ۱$ ، اگر θ یک جواب باشد: $\begin{cases} x = ۲k\pi + \theta \\ x = ۲k\pi - \theta \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\mathbf{tan\,x = a}$	$\mathbf{cot\,x = a}$
برای a محدودیتی وجود ندارد. اگر θ یک جواب باشد: $x = k\pi + \theta$ $(k \in \mathbb{Z})$	برای a محدودیتی وجود ندارد. اگر θ یک جواب باشد: $x = k\pi + \theta$ $(k \in \mathbb{Z})$

«فرمول‌های مهم مشتق‌گیری»

۱) $f'(a) = \underset{x\to a}{Lim} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \underset{h\to 0}{Lim} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (تعریف مشتق)

۲) $f(x) = c \to f'(x) = 0$

با فرض اینکه u و v توابعی مشتق‌پذیر از x باشند، داریم:

۳) $(cu)' = cu'$ ۴) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

۵) $(uv)' = u'v + uv'$ ۶) $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

۷) $y = f(u) \to \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df(u)}{du}\dfrac{du}{dx} = f'(u)\,u'$ (مشتق تابع مرکب)

۸) $(x^n)' = nx^{n-1} \quad \to \quad (u^n)' = nu'u^{n-1}$

۹) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \to \quad (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

۱۰) $(\sqrt[m]{x^n})' = \dfrac{n}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}} \quad \to \quad (\sqrt[m]{u^n})' = \dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

۱۱) $(\frac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2} \quad \to \quad (\frac{1}{u})' = -\dfrac{u'}{u^2}$

۱۲) $(sin\,x)' = cos\,x \quad \to \quad (sin\,u)' = u'cos\,u$

۱۳) $(cos\,x)' = -sin\,x \quad \to \quad (cos\,u)' = -u'sin\,u$

۱۴) $(tan\,x)' = 1 + tan^2x \quad \to \quad (tan\,u)' = u'(1 + tan^2u)$

۱۵) $(cot\,x)' = -(1 + cot^2x) \quad \to \quad (cot\,u)' = -u'(1 + cot^2u)$

۱۶) $(sec\,x)' = sec\,x\,tan\,x \quad \to \quad (sec\,u)' = u'sec\,u\,tan\,u$

۱۷) $(csc\,x)' = -csc\,x\,cot\,x \quad \to \quad (csc\,u)' = -u'\,csc\,u\,cot\,u$

۱۸) $(sin^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \to \quad (sin^{-1}u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۱۹) $(cos^{-1}x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \to \quad (cos^{-1}u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۲۰) $(tan^{-1}x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \to \quad (tan^{-1}u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

۲۱) $(cot^{-1}x)' = \dfrac{-1}{1+x^2} \quad \to \quad (cot^{-1}u)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

۲۲) $(sec^{-1}x)' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad \to \quad (sec^{-1}u)' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

۲۳) $(csc^{-1}x)' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad \to \quad (csc^{-1}u)' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

۲۴) $(a^x)' = (Ln\,a)a^x \quad \to \quad (a^u)' = u'(Ln\,a)a^u \quad (a \neq 1,\ a > 0)$

۲۵) $(e^x)' = e^x \quad \to \quad (e^u)' = u'e^u$

۲۶) $(log_a x)' = \dfrac{1}{(Ln\,a)x} \quad \to \quad (log_a u)' = \dfrac{u'}{(Ln\,a)u} \quad (a \neq 1,\ a > 0)$

۲۷) $(Ln\,x)' = \dfrac{1}{x} \quad \to \quad (Ln\,u)' = \dfrac{u'}{u}$

۲۸) $(sinh\,x)' = cosh\,x \quad \to \quad (sinh\,u)' = u'\,cosh\,u$

۲۹) $(cosh\,x)' = sinhx \quad \to \quad (cosh\,u)' = u'\,sinh\,u$

۳۰) $(tanh\,x)' = 1 - tanh^2x \quad \to \quad (tanh\,u)' = u'(1 - tanh^2u)$

۳۱) $(coth\,x)' = 1 - coth^2\,x \quad \to \quad (coth\,u)' = u'(1 - coth^2\,u)$

۳۲) $F(x,y) = 0 \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$ (مشتق‌گیری ضمنی)

۳۳) $\big(x = f(t)\,, y = g(t)\big) \to \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ (مشتق‌گیری پارامتری)

۳۴) $y = u^v \to Ln\,y = vLn\,u \to y' = u^v(v'Ln\,u + \frac{u'}{u}v)$ (مثال برای مشتق‌گیری لگاریتمی)

« فرمول‌های مهم انتگرال گیری »

۱) $\int dx = x + c$

۲) $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \quad (a \in \mathbb{R})$

۳) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

۴) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad n \neq -1$

۵) $\int \frac{1}{x}\,dx = Ln|x| + c$

۶) $\int e^x\,dx = e^x + c$

۷) $\int a^x\,dx = \frac{1}{Ln\,a}a^x + c$

۸) $\int sin\,x\,dx = -cos\,x + c$

۹) $\int sin\,ax\,dx = \frac{-1}{a}\,cos\,ax + c$

۱۰) $\int cos\,x\,dx = sin\,x + c$

۱۱) $\int cos\,ax\,dx = \frac{1}{a}\,sin\,ax + c$

۱۲) $\int sin^2 x\,dx = \frac{2x - sin\,2x}{4} + c$

۱۳) $\int cos^2 x\,dx = \frac{2x + sin\,2x}{4} + c$

۱۴) $\int tan\,x\,dx = -Ln|cos\,x| + c = Ln|sec\,x| + c$

۱۵) $\int cot\,x\,dx = Ln|sin\,x| + c = -Ln|csc\,x| + c$

۱۶) $\int sec\,x\,dx = Ln|sec\,x + tan\,x| + c$

۱۷) $\int csc\,x\,dx = Ln|csc\,x - cot\,x| + c$

۱۸) $\int sec^2 x\,dx = tan\,x + c$

۱۹) $\int csc^2 x\,dx = -cot\,x + c$

۲۰) $\int sec\,x\,tan\,x\,dx = sec\,x + c$

۲۱) $\int csc\,x\,cot\,x\,dx = -\,csc\,x + c$

۲۲) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = sin^{-1}x + c$

۲۳) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = sin^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

۲۴) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = tan^{-1}x + c$

۲۵) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

۲۶) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = sec^{-1}|x| + c$

۲۷) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\,sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + c$

۲۸) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\,sin^{-1}(\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + c$

۲۹) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = Ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

۳۰) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = Ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

۳۱) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2 x} + c$

۳۲) $\int sinh\,x\,dx = cosh\,x + c$

۳۳) $\int cosh\,x\,dx = sinh\,x + c$

۳۴) $\int (1 - tanh^2 x)\,dx = tanh\,x + c$

۳۵) $\int (1 - coth^2 x)\,dx = coth\,x + c$

۳۶) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء)

۳۷) $\int x\,sin\,x\,dx = -x\,cos\,x + sin\,x + c$

۳۸) $\int x\,cos\,x\,dx = x\,sin\,x + cos\,x + c$

۳۹) $\int x\,Ln\,x\,dx = \frac{1}{4}x^2\,(2Ln\,x - 1) + c$

۴۰) $\int Ln\,x\,dx = x(Ln\,x - 1) + c$

۴۱) $\int tan^{-1}x\,dx = x\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}Ln|1 + x^2| + c$

۴۲) $\int x\,e^x\,dx = (x - 1)\,e^x + c$

۴۳) $\int x^2\,e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$

« خواص لگاریتم طبیعی »

۱) $Log_e\,x = Ln\,x \quad (x > 0)$

۲) $Ln\,e = 1\ ,\ Ln\,1 = 0$

۳) $Ln\,xy = Ln\,x + Ln\,y$

۴) $Ln\frac{x}{y} = Ln\,x - Ln\,y$

۵) $Ln\,x^n = n\,Ln\,x \quad (n \in \mathbb{R})$

۶) $Log_b\,a = \frac{Ln\,a}{Ln\,b}$

۷) $e^{Ln\,x} = x$

۸) $a^x = e^{xLna}$

۹) $(Ln\,x)' = \frac{1}{x}$

۱۰) $\int \frac{1}{x}dx = Ln\,|x| + c$

کتابنامه

اپوستل، تام م: **حساب دیفرانسیل و انتگرال**، علیرضا ذکائی و همکاران (مترجمان)، مرکز نشر دانشگاهی تهران، ۱۳۶۰.

ادامز، رابرت الگزاندر: **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی جلد ۱ و ۲**، علی‌اکبر عالم زاده (مترجم)، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، دوم ۱۳۸۶.

استوارت، جیمز: **حسابگان جلد۱**، محمدحسین علامت‌ساز و همکاران (مترجمان)، انتشارات دانشگاه اصفهان، ۱۳۷۸.

توماس، جورج؛ فینی، راس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی جلد ۱و ۲**، مهدی بهزاد و همکاران (مترجمان)، مرکز نشر دانشگاهی تهران، ۱۳۷۲.

کرودیس، د. ج و همکاران: **حساب دیفرانسیل و انتگرال**، ابوالقاسم لاله (مترجم)، مرکز نشر دانشگاهی تهران، ۱۳۶۴.

لیت هولد، لویی: **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی جلد ۱و ۲**، علی اکبر عالم‌زاده (مترجم)، موسسه نشر علوم نوین، ۱۳۶۹.

مصاحب، غلام حسین: **آنالیز ریاضی**، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۶۳.

مندلسون، الیوت: **مسائل اساسی ریاضی**، عادل ارشقی (مترجم)، نشر نی، ۱۳۷۰.

همچنین برای تألیف اثرحاضر بسیاری ازکتاب‌هایی که تحت عنوان ریاضیات عمومی، ریاضیات پایه و یا ریاضیات فنی منتشر شده مورد مطالعه قرار گرفته و از تجربه مؤلفان محترم آنها استفاده شده است.